



Dynamique d'un champ à grande échelle engendré sur un fond turbulent

Basile Gallet

► To cite this version:

Basile Gallet. Dynamique d'un champ à grande échelle engendré sur un fond turbulent. Mécanique des fluides [physics.class-ph]. Ecole Normale Supérieure de Paris - ENS Paris, 2011. Français. NNT : . tel-00655623

HAL Id: tel-00655623

<https://theses.hal.science/tel-00655623>

Submitted on 31 Dec 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Ecole doctorale de physique de la région parisienne.
Thèse de doctorat de l'Ecole Normale Supérieure, spécialité physique.

Dynamique d'un champ à grande échelle engendré sur un fond turbulent

Basile Gallet

Soutenue publiquement le premier juillet 2011, devant le jury suivant :

Thierry Dauxois, président.
François Pétrélis, directeur de thèse.
Stéphan Fauve, directeur de thèse.
Maurice Rossi, rapporteur.
Patrice Le Gal, rapporteur.
Laurette Tuckerman, examinatrice.
Olivier Thual, examinateur.

Table des matières

Remerciements	7
Introduction	11
1 Effet dynamo et expérience Von Karman Sodium	17
1.1 Magnétohydrodynamique d'un fluide incompressible	20
1.1.1 Equation d'induction	20
1.1.2 Principaux effets générateurs de champ magnétique	21
1.1.3 Rétroaction du champ magnétique sur le champ de vitesse	23
1.2 La dynamo Von Karman Sodium	23
1.2.1 Dispositif expérimental	23
1.2.2 Effet dynamo et régimes dynamiques	24
1.2.3 Dynamique de basse dimensionalité	27
1.2.4 Bistabilité entre un champ stationnaire et un champ oscillant	31
2 Dynamo α^2 sphérique : régimes dynamiques du champ magnétique	39
2.1 Dynamo cinématique en coquilles sphériques	39
2.1.1 Position du problème	39
2.1.2 Forme du champ magnétique en dehors des nappes	41
2.1.3 Conditions aux limites et relations de passage	42
2.2 Régimes dynamiques observés en astrophysique	43
2.2.1 Renversements du champ magnétique terrestre	43
2.2.2 Localisation du champ magnétique dans un hémisphère : la dynamo mar- tienne	48
2.2.3 Oscillation entre deux modes de même symétrie : la dynamo solaire . . .	52
2.3 Application à la dynamo VKS	58
2.3.1 Cas symétrique	58
2.3.2 Brisure de symétrie : oscillation, et retour à la dynamo stationnaire . . .	59
2.3.3 Espace des phases de la dynamo VKS	59
2.3.4 Localisation du champ magnétique dans l'expérience VKS	61
2.A Obtention de la relation de dispersion	64
2.A.1 Système d'équations	64
2.A.2 Relation de dispersion	66
3 Dérive d'un motif sous l'effet d'une brisure de symétrie	69
3.1 Position du problème	70
3.1.1 Modèle de Swift-Hohenberg en géométrie finie	70
3.1.2 Brisure de symétrie par réflexion	71
3.2 Quelques exemples de brisure de symétrie	73

3.2.1	Ecoulement horizontal traversant	73
3.2.2	Variation spatiale des propriétés du système	74
3.2.3	Autres brisures de symétrie	77
3.3	Effet des termes non-linéaires	77
3.3.1	A $L \gg 1$, un seul coefficient gouverne tous les termes non-linéaires	77
3.3.2	Dynamique au voisinage d'un point de codimension deux	79
3.3.3	Espace des paramètres global	81
3.4	Discussion	90
3.4.1	Comparaison à la bibliographie existante	90
3.4.2	Application aux dynamos faiblement couplées	93
3.A	Résolution numérique de l'équation de Swift-Hohenberg	96
3.B	Couplage par les bords du domaine	96
3.B.1	Structure de l'opérateur de perturbation	97
3.B.2	Coefficients de couplage	97
3.B.3	Etude d'un cas particulier : seuil de dérive	98
3.B.4	Interpolation	100
3.B.5	Sens de propagation	100
3.C	Réduction à la forme normale de codimension 2	100
4	Dynamos engendrées par une variation spatiale de perméabilité magnétique	105
4.1	Un modèle minimal de dynamo due à une variation de perméabilité magnétique	106
4.1.1	Géométrie du problème	106
4.1.2	Equation d'induction avec μ_r variable	106
4.1.3	Solution externe et conditions aux limites	107
4.2	Résolution numérique du problème linéaire	108
4.2.1	Décomposition spectrale-différences finies	108
4.2.2	Une dynamo due à la modulation de perméabilité magnétique	108
4.2.3	Influence de l'épaisseur D de la paroi	111
4.2.4	Structure du mode neutre	111
4.3	Développement asymptotique pour une modulation faible de perméabilité magnétique	114
4.3.1	Evolution couplée des champs à grande et petite échelle	114
4.3.2	Conditions aux limites en $z = 0$, et seuil de la dynamo	115
4.3.3	Limite $D \rightarrow \infty$: seuil et structure du mode instable	117
4.3.4	Mécanisme de cette dynamo	119
4.3.5	Retour sur les théorèmes anti-dynamo	121
4.3.6	Réponse sous-harmonique	121
4.4	Pertinence de ce mécanisme pour la dynamo VKS	122
4.4.1	Cisaillement fini en $z = 0$	123
4.4.2	Une dynamo beaucoup plus efficace	124
4.4.3	Influence de l'épaisseur D	125
4.4.4	Rôle du disque ferromagnétique	126
4.A	Obtention des matrices du code numérique	129
4.A.1	Gestion de la dépendance en x	129
4.A.2	Quelques opérateurs du système final	129
4.A.3	Opérateur de dérivation par rapport à z	130
4.A.4	Opérateurs complets	131
4.B	Expression des conditions aux limites en $z = 0$ dans la limite de faible modulation	132

5	Dynamique d'une circulation grande échelle engendrée par un écoulement cellulaire	135
5.1	Position du problème	136
5.1.1	Equations du mouvement, géométrie du problème et nombres sans dimension	136
5.1.2	Méthode de résolution numérique	137
5.2	Etude à Rh infini, et observation d'une circulation grande échelle	138
5.2.1	$\psi_{1,1}$ versus Re	138
5.2.2	Calcul analytique de la solution stationnaire	140
5.2.3	Comparaison calcul-simulations	143
5.2.4	Stabilité de la solution stationnaire	148
5.3	Renversements de la circulation grande échelle	149
5.3.1	Effet de la friction	149
5.3.2	Modélisation par un système dynamique simple	150
5.3.3	Caractérisation des renversements hydrodynamiques	156
5.4	Conclusion	159
5.A	Méthode de résolution numérique de l'équation de Navier-Stokes 2D	161
5.A.1	Evaluation des termes linéaires	161
5.A.2	Evaluation du terme non-linéaire	161
5.B	Calcul analytique de la solution à haut Re	162
5.B.1	Calcul de ξ_a	162
5.B.2	Calcul de ξ_s	164
	Conclusion	167
	Liste de publications	173

Remerciements

Je tiens à remercier tout d'abord mes deux directeurs de thèse, Stéphan Fauve et François Pétrélis. Ils m'ont appris énormément de physique, tout en me laissant une grande liberté de travail au quotidien. Ils ont fait preuve d'une disponibilité et d'une bonne humeur à toute épreuve. En plus de l'encadrement idéal qu'ils m'ont apporté, ils m'ont orienté vers des écoles d'été et des laboratoires à l'étranger qui m'ont permis de découvrir d'autres conditions de travail.

Je remercie l'ensemble des membres de jury pour avoir accepté d'évaluer mon travail, et pour l'intérêt qu'ils y ont porté.

Je remercie le directeur du laboratoire de physique statistique, Eric Pérez, et les secrétaires Annie Ribaudeau, Marie Gefflot et Nora Sadaoui, qui ont su garder le sourire tandis que je m'acharnais à rendre systématiquement les formulaires administratifs en retard.

Je remercie également toutes les personnes que j'ai croisées dans l'équipe de Physique Non-Linéaire pendant mon doctorat. Les pauses café ont été l'occasion d'apprendre de la physique uniquement en les écoutant parler, et j'y trouve aujourd'hui une noble justification de mon addiction à la caféine. Je tiens à remercier particulièrement Nicolas Mordant, avec qui j'ai eu l'occasion d'apprendre un grand nombre de techniques expérimentales ainsi que le maniement du tour et de la fraiseuse (si j'ai encore dix doigts, c'est peut-être grâce à lui). Je remercie les doctorants présents lorsque je suis arrivé D24 : Michaël Berhanu, avec qui j'ai fait mes premières expériences de magnétohydrodynamique, Claudio Falcon, qui a assuré l'essentiel de la programmation musicale et m'a initié aux us et coutumes chiliens, et enfin Christophe Gissinger, avec qui j'ai développé ce goût particulier pour les poils faciaux. Je remercie tous les étudiants qui sont arrivés plus tard : Johann Herault, avec qui j'ai eu le plaisir de travailler (et pour avoir bien voulu arrêter de lancer du mercure partout), Benjamin Miquel, qui aurait une moto, et Nicolas Cornuault.

Je remercie les professeurs C.R. Doering et E.A. Spiegel, avec qui j'ai eu l'occasion de travailler à Woods Hole, et Nicolas Mujica, qui m'a accueilli deux fois dans son groupe de recherche à la Universidad de Chile.

Durant ces années de doctorat, j'ai fait partie de la collaboration Von Karman Sodium. Je remercie tous les membres de la collaboration avec qui j'ai eu l'occasion de travailler sur cette expérience passionnante.

Au moment de rendre ce manuscrit de thèse, j'ai forcément une pensée pour Laurent Jacquin : la fumée de sa cigarette a certainement fait plus pour ma vocation de mécanicien des fluides que bon nombre de mes cours de Master 2. Je tiens à remercier mes amis, dont la liste pourrait être très longue. Je remercie donc en premier lieu François, pour son soutien perpétuel et sa bonne humeur quotidienne, et je l'excuse d'avoir cru un jour au futur de la SEGA SATURN. Je remercie mes amis de l'ENS et assimilés : toute la promo du PIP, Camille, Laura, Sarah, Raph, Hélène, JD, Oskar, Erwan, Lisa, pour les coïncidences, la musique et la fête. Je remercie Manu pour bien des choses, dont beaucoup de croissants aux amandes et un peu de peroxyde d'hydrogène. Je remercie Juliette pour les tostadas et la rédaction à l'île d'Arz. Je remercie Sarah et Julia. Je remercie tous les gens que j'ai croisés au Chili : Suomi, Leo, Tania, Loreto, el guaton, Constanza, Penelope. Je remercie ceux qui ont contribué à me faire maintenir une activité sportive : Laetitia, Benoit, Nicolas, Juliette, Sébastien, Kassim et Fred.

Enfin, je remercie tous les membres de ma famille. Ils m'ont toujours soutenu sans jamais comprendre ce que je faisais, ce qui est une belle preuve de confiance. Merci donc à mes parents, ma soeur Noémie et mon frère Romain.

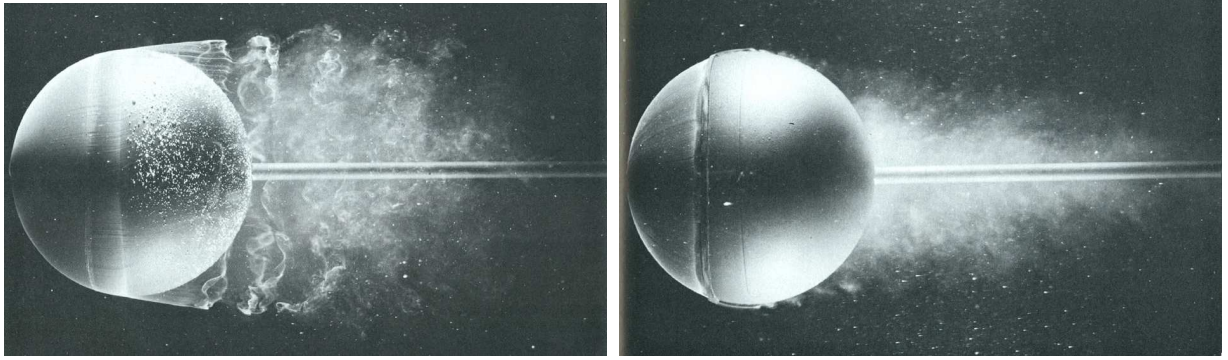


FIGURE 1 – Écoulement d’eau d’une sphère. Le nombre de Reynolds vaut 15000 à gauche et 30000 à droite (clichés ONERA).

Introduction

Vu de loin, tout a l’air pourtant assez simple.

Un des problèmes de physique non linéaire les plus célèbres est sans doute celui de la turbulence hydrodynamique : les équations qui régissent le mouvement d’un fluide newtonien incompressible sont connues depuis 1822, et il semble pourtant impossible d’en donner une solution générale. Il n’y a qu’à regarder la complexité des motifs créés par la fumée d’une cigarette pour comprendre qu’une description de ces structures en termes de fonctions mathématiques simples paraît fortement compromise : la solution est instationnaire et la fumée forme des structures complexes sur une large gamme d’échelles spatiales. Si les fluides turbulents se rencontrent dans de nombreux domaines de la physique, tels que la géophysique, l’océanographie, l’astrophysique ou l’hydraulique, c’est peut-être dans le cadre de l’aérodynamique que le problème est posé de la manière la plus simple et naïve possible : quelle est la force de frottement exercée par un fluide turbulent s’écoulant autour d’un objet de forme donnée ?

L’écoulement turbulent d’eau à haut nombre de Reynolds autour d’une sphère est représenté sur la figure 1. On constate qu’à $Re = 30000$, les bulles présentes dans l’eau, qui permettent d’imager les structures de l’écoulement, constituent un sillage flou derrière la sphère. ”Vu de loin”, il semblerait donc que l’on peut s’affranchir des mouvements erratiques du fluide à petite échelle, pour ne décrire que le mouvement à grande échelle d’un fluide de nature différente. Cette approche est à l’origine de la notion de ”viscosité turbulente” utilisée en ingénierie : le fluide a un comportement turbulent extrêmement compliqué et dissipe beaucoup d’énergie. On peut supposer que ce mouvement turbulent est équivalent à l’écoulement laminaire d’un fluide qui aurait une viscosité plus élevée. Il y aurait alors une viscosité dépendante du nombre de Reynolds local qu’il suffirait d’introduire dans l’équation de Navier-Stokes avant d’en calculer la solution laminaire. Cette approche échoue rapidement dès que l’on se rend compte que la valeur de cette ”viscosité turbulente” dépend fortement de la géométrie de l’écoulement considéré, si bien que la théorie n’a aucun pouvoir prédictif.

Dans un contexte de géophysique externe, les écoulements atmosphériques et océaniques ont lieu dans des couches de fluide dont l’épaisseur est très faible devant leur extension horizontale. En première approximation, on peut considérer l’écoulement comme étant bidimensionnel, et on est ramené au problème de la turbulence à deux dimensions. Or la turbulence à deux dimensions est réputée pour former des structures de grandes tailles, par la fusion de structures de tailles plus petites. Dans ces écoulements, les grandes échelles sont donc prédominantes. Ces grandes

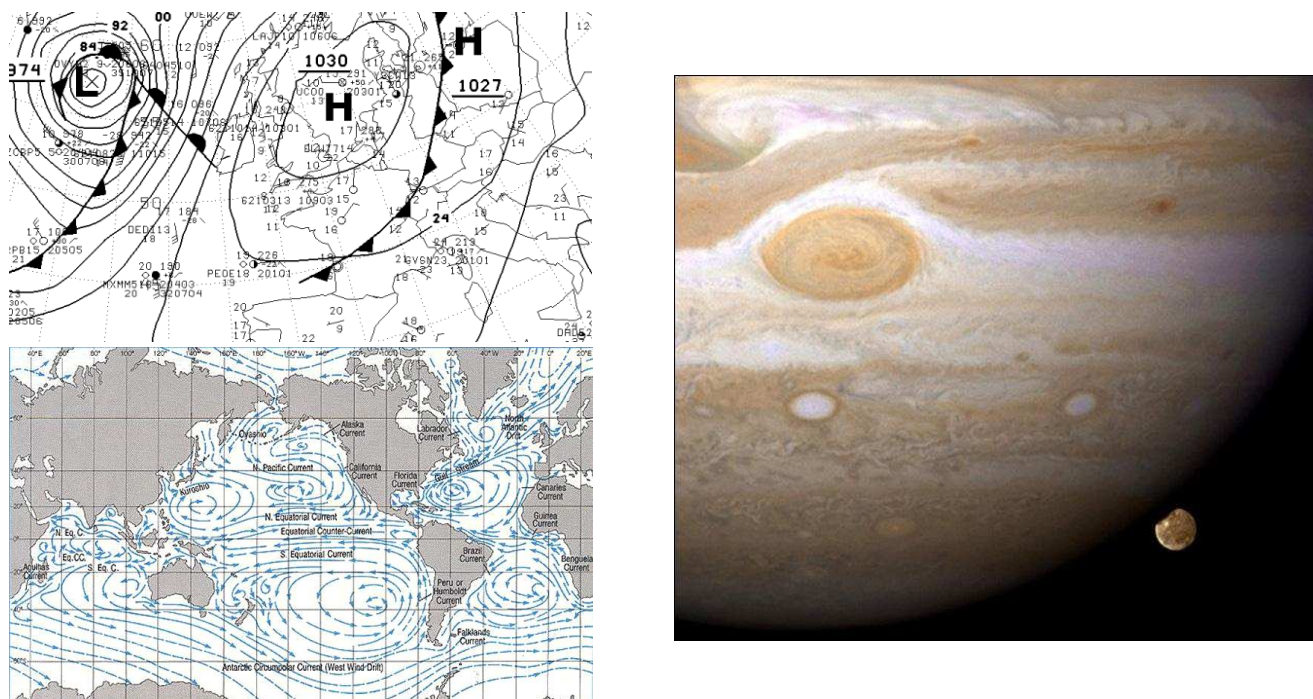


FIGURE 2 – A gauche : carte météorologique mettant en évidence un anticyclone couvrant une grande partie de l'Europe (en haut) et planisphère des courants océaniques majeurs (en bas). A droite : la grande tache rouge de Jupiter (cliché NASA).

structures sont visibles sur la carte météorologique et sur la carte des courants marins présentées sur la figure 2. Un exemple astrophysique est celui de la grande tache rouge de Jupiter, un gigantesque anticyclone qui mesure deux à trois diamètres terrestres. La première observation remonte à 1664 et la structure perdure depuis.

En plus de l'observation de cette séparation d'échelles spatiales, les grandes structures de l'écoulement bidimensionnel peuvent présenter une dynamique relativement lente, mettant en évidence également de grandes échelles temporelles. Un exemple d'une telle dynamique est le phénomène "el Niño" [1] représenté sur la figure 3. Ce phénomène se caractérise au niveau des latitudes équatoriales par une augmentation de la température de surface de l'océan pacifique Est. Cette anomalie de température se propage ensuite un peu plus à l'intérieur de l'océan pacifique. Cette augmentation de température de surface océanique est couplée à une anomalie de l'intensité du vent dans la région. La forte corrélation entre les trois séries temporelles de la figure 3 traduit l'existence d'une structure de grande taille. Cette structure est représentée pour le phénomène el Niño de 1997. Ces événements se produisent aléatoirement, avec un temps moyen entre deux événements de l'ordre de quelques années environ, et chaque événement dure quelques mois. Cette dernière échelle de temps est de l'ordre de grandeur du temps de retournement d'une structure de quelques milliers de kilomètres dans un courant marin ayant une vitesse de l'ordre de la dizaine de centimètres par seconde. A ces grandes structures correspond donc une échelle de temps longue d'évolution.

Dans les exemples précédents, on s'intéresse aux grandes échelles d'un écoulement qui par ailleurs contient de plus petites échelles turbulentes. C'est donc le même champ (le champ de vitesse) qui contient à la fois les grandes et les plus petites échelles. Une séparation plus nette est rencontrée dans le cadre de l'étude de l'effet dynamo : au sein des planètes et des étoiles, le mouvement turbulent d'un fluide conducteur d'électricité est le siège d'une instabilité par lequel des courants électriques et un champ magnétique apparaissent spontanément. Vus de loin, la

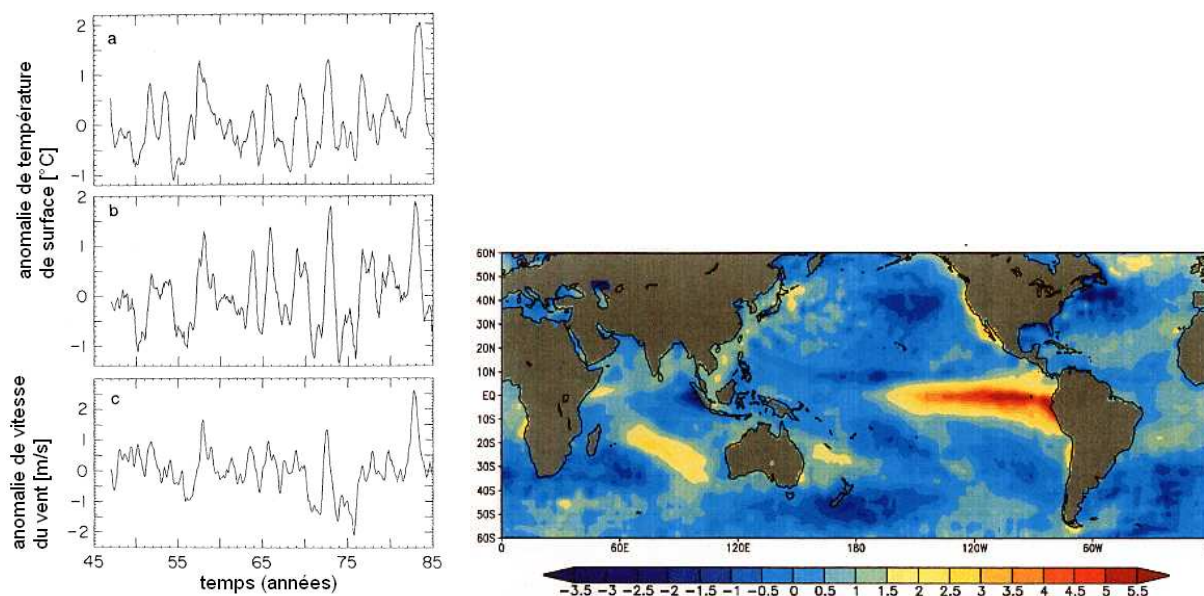


FIGURE 3 – A gauche : Anomalie de température de surface aux latitudes équatoriales, pour l’océan pacifique Est (a) et central (b). La variation annuelle a été retirée. En bas : anomalie du vent dirigé vers l’Est dans l’océan pacifique central, aux latitudes équatoriales (c). La corrélation entre ces trois signaux suggère l’existence d’une structure de grande échelle, qui est représentée en termes d’anomalie de température de surface en °C pour l’évènement ”el Niño” de 1997 (à droite). Séries temporelles issues de [1] et planisphère issu du National Center for Environmental Prediction, US.

Terre et le Soleil possèdent un champ magnétique de structure dipolaire, dont l’échelle typique est le rayon de l’objet considéré. Nous verrons dans le premier chapitre que le champ magnétique terrestre s’est renversé aléatoirement pendant les temps géologiques, tandis que celui du soleil oscille avec une étonnante périodicité de 22 ans. C’est donc un exemple d’instabilité dans lequel un champ dominé par des grandes échelles (spatiales et temporelles) apparaît sur un écoulement turbulent. L’expérience Von Karman Sodium, qui constitue la motivation de la plupart des chapitres de cette thèse, a reproduit en laboratoire un tel champ magnétique dominé par des grandes échelles, et engendré par instabilité dynamo dans un écoulement pleinement turbulent.

Comment réduire le nombre de degrés de liberté ?

Ces systèmes ont été observés, mesurés, quantifiés, pour certains depuis plus de 300 ans. Pourtant ils soulèvent encore un grand nombre de questions aussi naïves que fondamentales auxquelles il est difficile de donner une réponse précise : quelle force exerce l’air sur une balle de ping-pong ? Quand le champ magnétique terrestre se renversera-t-il à nouveau ? Peut-on prédire avec précision le temps qu’il fera dans une semaine ?

Pire encore, on connaît relativement bien les équations qui régissent la dynamique de ces systèmes : l’équation de Navier-Stokes décrit le mouvement d’un fluide et la turbulence hydrodynamique qu’il peut engendrer. Si le fluide conduit l’électricité, on fait appel à la loi d’Ohm et aux équations de Maxwell pour décrire le champ magnétique auquel est couplé le champ de vitesse. S’il présente des variations de température et de densité, on inclut la gravité, une équation d’état et l’équation de la chaleur. Malheureusement, on ne peut exprimer la solution générale de ces équations. Depuis quelques décennies, une possibilité consiste à calculer des so-

lutions approchées avec un ordinateur, qui dans le meilleur des cas fournira autant voire plus d'informations sur le système qu'une expérience idéale. Cette méthode, tout comme l'approche expérimentale, a permis de comprendre un grand nombre de mécanismes physiques par lesquels on acquiert une certaine intuition du comportement de ces différents systèmes.

Néanmoins, cette méthode ne résout pas un problème essentiel : On se fiche pas mal des détails de la dynamique du système, on ne veut pas décrire toutes les échelles de la turbulence, on ne tient pas à connaître le champ magnétique à toutes les échelles. Au contraire, on aimerait pouvoir dégager des lois générales pour quelques grandeurs macroscopiques : la force exercée par la turbulence sur un objet, l'intensité d'un cyclone ou d'un grand courant marin, ou encore l'amplitude et la fréquence d'oscillation du champ magnétique solaire.

Boltzmann a réussi le tour de force de ramener la dynamique d'un gaz formé de 10^{23} particules à celle de trois variables macroscopiques que sont la température, la densité et la pression. Grâce à la mécanique statistique, il a simplifié drastiquement l'étude des systèmes à l'équilibre, et a du même coup complexé des générations à venir de physiciens de la turbulence et des systèmes non-linéaires : comprendre un système physique, ça semble être isoler les quelques grandeurs ou degrés de liberté pertinents pour décrire le système. A l'issue de cette opération, on peut faire des analogies et dégager des grandes classes de systèmes qui auront le même comportement.

Structure du manuscrit

En physique non-linéaire, la théorie des formes normales joue ce rôle. Elle permet, dans le cadre de l'étude d'une instabilité hydrodynamique, de passer de l'infinité de degrés de liberté que constitue le champ de vitesse du fluide en tout point de l'espace, au peu de degrés de liberté que sont les amplitudes de quelques modes marginalement stables. Bien que son domaine de validité soit relativement restreint, nous verrons dans cette thèse que cette théorie permet d'expliquer de manière relativement simple la dynamique d'un champ magnétique engendré par effet dynamo, et ce même dans un écoulement pleinement turbulent.

Cette interprétation des résultats expérimentaux en termes de systèmes dynamiques constitue le premier chapitre de cette thèse. Après quelques rappels de magnétohydrodynamique, nous revenons sur un mécanisme de renversements de champ magnétique proposé récemment que nous étendons au régime de bistabilité entre dynamo stationnaire et dynamo oscillante. Le champ magnétique à grande échelle est alors décrit à l'aide de deux modes qui se couplent linéairement lorsque l'on brise faiblement une symétrie du système. Cette approche en termes d'équation d'amplitude est développée en détails dans les deux chapitres suivants.

Dans le second chapitre, nous utilisons un modèle de dynamo cinématique simple pour faire des prédictions sur la géométrie à grande échelle du champ magnétique engendré. Nous explicitons le passage de l'équation d'induction à l'équation d'amplitude régissant l'évolution des deux modes couplés, avant de faire le lien entre les renversements du champ magnétique et le phénomène de localisation hémisphérique de ce champ. Ces prédictions sont confrontées à des données astrophysiques et aux données de l'expérience Von Karman Sodium.

Le troisième chapitre porte sur la dérive d'un motif périodique lorsqu'une symétrie est faiblement brisée. Ce système, plus simple et intuitif que le problème magnétique, présente une forte analogie avec ce dernier. En effet, si les deux systèmes de départ sont a priori très différents, ils peuvent tous les deux être décrits à l'aide de deux modes couplés, et conduisent donc au même type d'équations d'amplitudes. La relative simplicité du problème de dérive d'un motif permet d'en faire une étude exhaustive dans les régimes linéaire et non-linéaire. Nous en déduisons une prédiction pour l'expérience VKS, valable si cette dernière peut être considérée comme étant formée de "deux dynamos éloignées".

Le quatrième chapitre présente un mécanisme d'effet dynamo dans lequel une modulation

de la perméabilité magnétique d'une paroi permet d'engendrer du champ magnétique à partir d'un écoulement particulièrement simple. C'est un exemple de génération de champ à grande échelle par une modulation des conditions aux limites à petite échelle. Ce phénomène constitue une explication possible du rôle des pales ferromagnétiques des disques de l'expérience VKS.

Enfin, le dernier chapitre porte sur la dynamique d'une circulation à grande échelle engendrée dans un écoulement cellulaire à petite échelle. Nous présentons une solution analytique décrivant cette circulation à haut nombre de Reynolds, ainsi que les petites échelles avec lesquelles elle coexiste. Nous étudions ensuite numériquement le régime de renversements erratiques du sens de rotation de la circulation globale. Ces renversements sont plus complexes que ceux étudiés dans les trois premiers chapitres, en ce sens que la réduction à une forme normale ne peut pas être appliquée à ce système : on est en présence de renversements dans un système à grand nombre de degrés de liberté. Nous caractérisons ces renversements à l'aide des outils des systèmes dynamiques.

Chapitre 1

Effet dynamo et expérience Von Karman Sodium

Dans le langage courant, le mot dynamo fait référence au dispositif qui permet d'alimenter un phare à partir du mouvement de la roue d'une bicyclette. Ce dispositif est constitué d'un aimant entraîné en rotation par le mouvement de la roue. Imaginons un dispositif plus simple au sein duquel un disque métallique tourne dans le champ magnétique créé par un aimant. Le mouvement de ce disque dans le champ magnétique de l'aimant engendre une force électromotrice qui permet à un courant électrique de circuler dans l'ampoule du phare. Ce dispositif convertit donc une partie de l'énergie mécanique de la roue en énergie électrique.

Afin de s'affranchir de la présence de l'aimant, on peut le remplacer par une ou plusieurs spires de fil conducteur. Ce dispositif et le précédent sont représentés sur la figure 1.1 : le courant créé passe dans la spire et engendre lui-même le champ magnétique nécessaire à la conversion. Le champ magnétique apparaît alors par un mécanisme d'instabilité : une petite perturbation de courant électrique engendre une perturbation de champ magnétique. Du fait du mouvement du disque conducteur, ce champ magnétique créé une force électromotrice et amplifie donc le courant initial. Si le disque tourne lentement, ce mécanisme d'amplification est peu efficace et la perturbation de courant est rapidement dissipée par effet Joule. En revanche, si la roue tourne suffisamment vite pour compenser les pertes ohmiques dans les différents conducteurs, le courant électrique qui parcourt le circuit croît exponentiellement par instabilité. Ce dispositif s'appelle la dynamo de Bullard. Plus généralement, en physique on appelle effet dynamo une telle création de champ magnétique par un mécanisme d'instabilité. Cet effet est à l'origine de la production industrielle de la majeure partie de l'électricité que nous consommons.

Cette instabilité est également un thème important de recherche en physique fondamentale, depuis que Larmor proposa en 1919 qu'elle fût responsable du champ magnétique de nombreux objets astrophysiques [2]. L'hypothèse de Larmor était que les mouvements internes des corps célestes permettent l'amplification spontanée d'un champ magnétique par effet dynamo. Il insiste essentiellement sur le cas du soleil, mais mentionne le fait que le même mécanisme pourrait être à l'oeuvre au sein de la Terre. On sait aujourd'hui que le noyau externe de la Terre est constitué de métal liquide, un fluide conducteur d'électricité. Le soleil est une boule de plasma, qui conduit lui aussi l'électricité. La forte différence de température entre le centre de ces objets et leur surface est responsable (entre autres) de vigoureux mouvements de convection.

La question alors posée était de savoir si, à condition de choisir judicieusement le champ de vitesse au sein du fluide conducteur, on pouvait créer spontanément du champ magnétique par

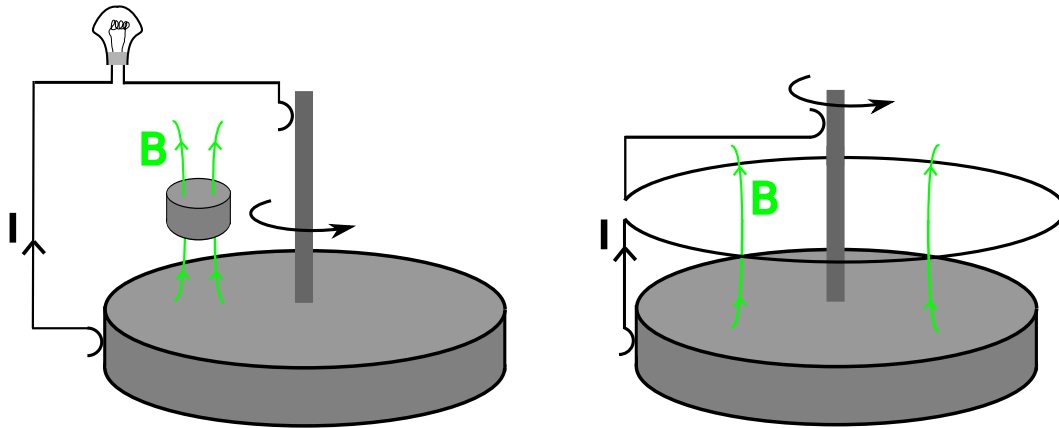


FIGURE 1.1 – A gauche : la rotation d'un disque dans le champ magnétique B d'un aimant engendre le courant I qui permet d'allumer une ampoule. A droite : l'aimant a été remplacé par une spire. Si la rotation du disque est suffisamment rapide, le champ magnétique est auto-entretenu.

instabilité dynamo. Des écoulements modèles relativement simples furent proposés (G.O. Roberts [3], Ponomarenko [4]), puis réalisés expérimentalement beaucoup plus récemment ([5], [6]). Néanmoins, ces écoulements de fluide étaient fortement contraints, et la question de l'existence d'un effet dynamo dans un écoulement pleinement turbulent restait ouverte.

Considérons quelques objets du système solaire :

- Le champ magnétique solaire est à grande échelle un dipôle orienté selon l'axe de rotation, dont l'amplitude varie périodiquement dans le temps avec une période de 22 ans. Le champ à la surface du soleil est en moyenne de l'ordre de 1 G . A ce champ à grande échelle se superposent les "régions actives", où se trouvent les taches solaires. Ce sont des zones de fort champ magnétique, qui peut atteindre jusqu'à 4000 G . La latitude de ces taches solaires est tracée en fonction du temps sur la figure 1.2.
- Selon les nombreuses études paléomagnétiques, le champ magnétique terrestre a toujours été dominé par un dipôle, orienté lui aussi en première approximation selon l'axe de rotation. Cependant, le sens de ce dipôle s'est inversé brusquement dans le temps, et ce de manière complètement erratique. L'évolution du dipôle magnétique terrestre durant les deux derniers millions d'années est représentée sur la figure 1.2.
- Les champs magnétiques de Saturne, Jupiter, Neptune et Uranus sont des dipôles faisant respectivement des angles de 0 , 10 , 47 , et 59 degrés avec l'axe de rotation de la planète.
- Mars actuellement n'est plus une dynamo, mais en a été une. De plus, le champ rémanent est localisé uniquement dans l'hémisphère Sud de la planète.

Derrière cette grande diversité de géométries et de dynamiques, il faut noter une caractéristique commune à tous ces objets astrophysiques : ils possèdent un champ magnétique à grande échelle dont la dynamique est plutôt lente, alors que l'écoulement qui l'engendre est turbulent, fluctue rapidement, et possède une taille caractéristique a priori petite devant le rayon de l'objet. Le problème du champ magnétique des objets astrophysiques soulève donc des questions fondamentales sur la dynamique d'une structure à grande échelle engendrée sur un fond turbulent :

- Quel est le rôle des petites échelles de vitesse sur la génération du champ magnétique ?
- Quel est l'effet de la turbulence sur la valeur à saturation du champ magnétique ?
- Quel est l'effet de la turbulence sur la dynamique temporelle du champ magnétique ?

L'expérience Von Karman Sodium (VKS) a été conçue entre autres pour répondre à ces ques-

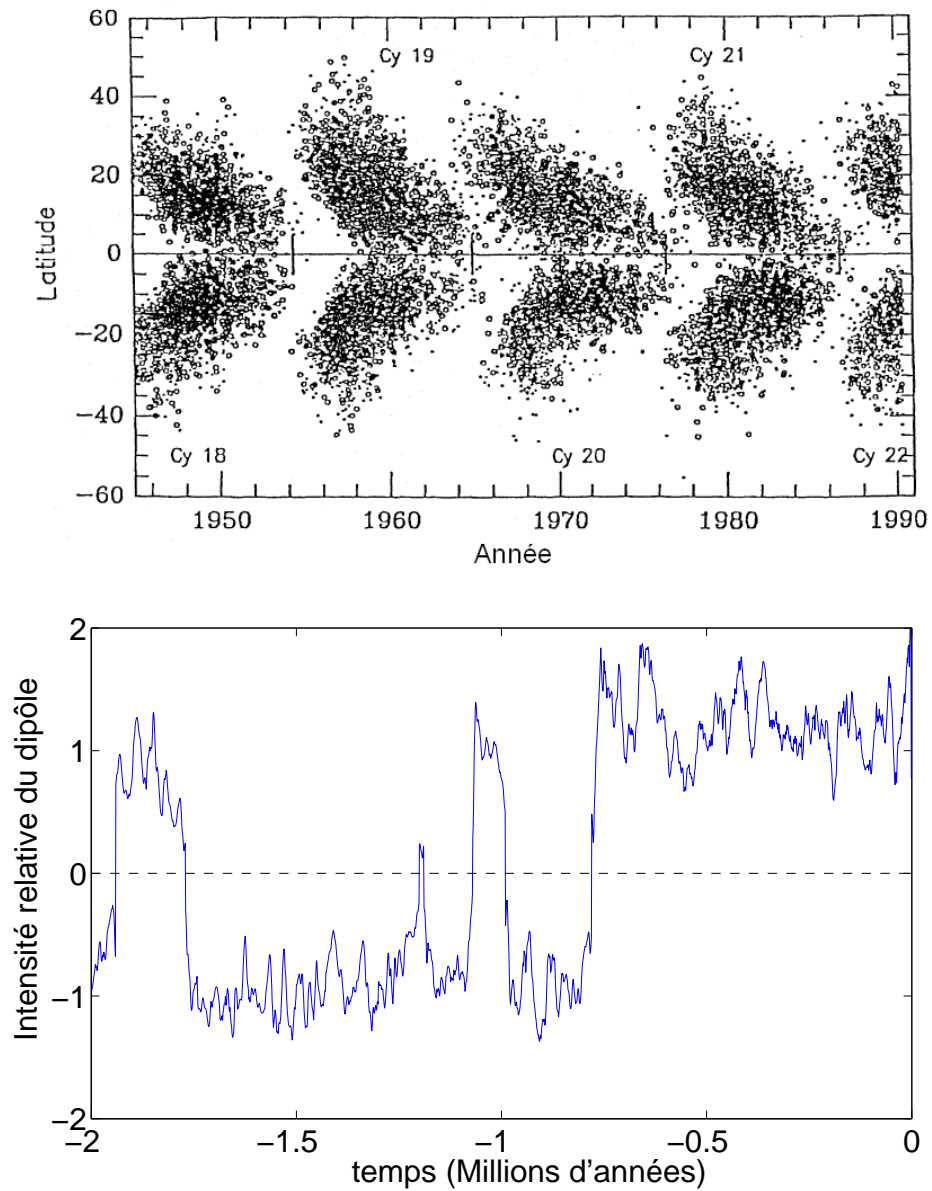


FIGURE 1.2 – En haut : diagramme papillon du soleil. La latitude d'apparition des taches solaires est tracée en fonction du temps. Le motif se reproduit avec une période de 11 ans, qui traduit la périodicité de 22 ans du champ magnétique solaire (d'après [7]). En bas : Renversements du dipôle magnétique terrestre au cours des derniers millions d'années (d'après [8]).

tions. Son succès en 2006 a constitué la première démonstration expérimentale de l'effet dynamo dans un écoulement pleinement turbulent [9]. Parmi les trois questions posées précédemment, le présent chapitre se focalise sur celle des régimes dynamiques de champ magnétique. Après quelques brefs rappels de magnétohydrodynamique, je présenterai les régimes dynamiques de l'expérience VKS, puis je décrirai un modèle simple permettant de les expliquer, avant de me concentrer plus particulièrement sur le régime de bistabilité entre champ stationnaire et champ oscillant.

1.1 Magnétohydrodynamique d'un fluide incompressible

La magnétohydrodynamique est la mécanique des fluides conducteurs d'électricité, dans la limite où la vitesse du fluide reste faible devant la vitesse de la lumière. Dans cette limite, les équations d'évolution du système couplent le champ de vitesse du fluide et seulement le champ magnétique.

1.1.1 Equation d'induction

Considérons donc un fluide de conductivité électrique σ . Soit \vec{v} son champ de vitesse, \vec{E} le champ électrique, \vec{J} la densité de courant électrique et \vec{B} le champ magnétique. Rappelons que la loi d'Ohm n'est valable que dans le référentiel où le fluide est au repos. Si l'on note avec un ' les grandeurs dans ce référentiel, et sans ' les mêmes grandeurs dans le référentiel du laboratoire, le changement de référentiel s'écrit dans la limite $v \ll c$:

$$\vec{J}' \simeq \vec{J} \quad (1.1)$$

$$\vec{B}' \simeq \vec{B} \quad (1.2)$$

$$\vec{E}' \simeq \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \quad (1.3)$$

L'équation de Maxwell-Faraday, puis la loi d'Ohm $\vec{J}' = \sigma \vec{E}'$ conduisent à :

$$-\partial_t \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{\nabla} \times \left(\frac{\vec{J}}{\sigma} - \vec{v} \times \vec{B} \right) \quad (1.4)$$

Dans la limite d'un mouvement non-relativiste du fluide, le courant de déplacement peut être négligé dans la loi de Maxwell-Ampère, ce qui permet d'écrire :

$$-\partial_t \vec{B} = \vec{\nabla} \times \left(\frac{1}{\mu_0 \sigma} \vec{\nabla} \times \vec{B} - \vec{v} \times \vec{B} \right) \quad (1.5)$$

En utilisant $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$, on obtient l'équation d'induction, qui régit l'évolution du champ magnétique :

$$\partial_t \vec{B} = \vec{\nabla} \times (\vec{v} \times \vec{B}) + \frac{1}{\mu_0 \sigma} \Delta \vec{B} \quad (1.6)$$

Dans le cas d'un fluide incompressible, la divergence de \vec{v} est également nulle, ce qui permet de réécrire l'équation sous la forme :

$$\partial_t \vec{B} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} = (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} + \frac{1}{\mu_0 \sigma} \Delta \vec{B} \quad (1.7)$$

Quelques commentaires sur l'équation obtenue : le membre de gauche est la dérivée totale du champ magnétique. Le champ magnétique est donc advecté par le champ de vitesse. Le membre de droite comprend deux termes :

- Le premier terme est appelé terme d'étirement du champ magnétique. Ce terme traduit le fait qu'un gradient de vitesse peut amplifier un champ magnétique pré-existant. C'est cette amplification qui est responsable de l'effet dynamo.
- Le second terme est un terme diffusif, qui correspond à la dissipation ohmique dans le fluide. La quantité $(\mu_0\sigma)^{-1}$ s'appelle la diffusivité magnétique, et est parfois notée η .

Remarquons de plus que si le champ de vitesse est fixé, ou indépendant de \vec{B} , cette équation est linéaire. Le problème de "dynamo cinématique" consiste à se donner le champ de vitesse \vec{v} du fluide, et à étudier la stabilité de perturbations infinitésimales de champ magnétique. De telles perturbations ne pourront être instables que si le terme amplificateur parvient à compenser la diffusion ohmique. Notons L une taille caractéristique du champ de vitesse, et V une vitesse caractéristique du fluide. On peut construire un nombre sans dimension en faisant le rapport des deux termes à droite de l'équation d'induction :

$$Rm = \frac{(\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{v}}{\eta \Delta \vec{B}} = \frac{VL}{\eta} \quad (1.8)$$

La similarité entre ce nombre sans dimension et le nombre de Reynolds, dans lequel on aurait remplacé la diffusivité cinématique ν par la diffusivité ohmique η , lui vaut l'appellation de nombre de Reynolds magnétique. Si ce nombre est grand, les effets amplificateurs du champ sont importants, et on peut éventuellement observer du champ magnétique par effet dynamo. S'il est faible, ce sont les effets dissipatifs qui dominent, et toute perturbation de champ magnétique est rapidement amortie. En d'autres termes, l'apparition de champ magnétique par effet dynamo a lieu au-delà d'une valeur critique du nombre de Reynolds magnétique, appelé seuil de l'effet dynamo.

Revenons sur l'approximation non-relativiste effectuée précédemment. Si l'on conserve le courant de déplacement dans la loi de Maxwell-Ampère, on obtient :

$$\frac{\eta}{c^2} \partial_{tt} \vec{B} + \partial_t \vec{B} = \vec{\nabla} \times (\vec{v} \times \vec{B}) + \eta \Delta \vec{B} \quad (1.9)$$

Le temps caractéristique de relaxation de $\partial_t \vec{B}$ vers le forçage effectué par le membre de droite est η/c^2 . Pour des vitesses non-relativistes, ce temps est très court devant un temps advectif L/V , ou un temps de diffusion ohmique L^2/η . Ce terme en dérivée seconde de \vec{B} est donc un terme relativiste, qui doit être négligé, puisque nous avons négligé les termes relativistes lors de l'écriture du changement de référentiel.

1.1.2 Principaux effets générateurs de champ magnétique

Il existe deux mécanismes d'induction principaux, qui permettent de comprendre l'amplification de champ magnétique par un champ de vitesse. Le premier s'appelle l'effet ω , et traduit le fait qu'un cisaillement de fluide $\vec{v} = Sz\vec{e}_x$ va induire une composante de champ selon x à partir d'un champ selon z . Ceci se comprend de la manière suivante : lorsque la dissipation ohmique est très faible, les lignes de champ magnétique sont "gelées" dans le fluide. Si l'on considère une ligne de champ initialement verticale, le champ de vitesse entrainera plus rapidement le haut de cette ligne que le bas. La ligne de champ est donc tordue, et l'on a créé du champ selon x . Ce mécanisme est représenté schématiquement sur la figure 1.3.

Le deuxième mécanisme d'induction, moins intuitif, s'appelle l'effet α . Considérons un écoulement stationnaire, périodique dans l'espace, dont le champ de vitesse a une moyenne spatiale nulle, et dont la taille et la vitesse caractéristiques l et V conduisent à un nombre de Reynolds

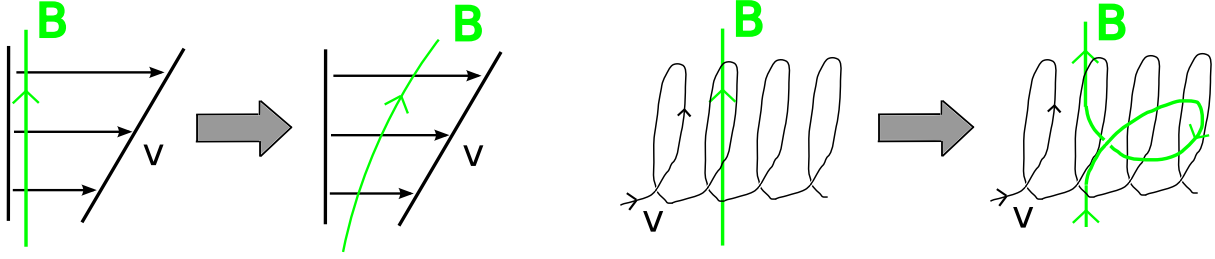


FIGURE 1.3 – A gauche : schématisation de l'effet ω . Une ligne de champ est advectée plus rapidement par le fluide situé en haut que par celui qui est en bas, ce qui induit du champ dans la direction de l'écoulement. A droite : schématisation de l'effet α . L'hélice entraîne la ligne de champ en la tournant d'un quart de tour, et induit donc du champ selon l'autre direction perpendiculaire à son axe (voir texte).

magnétique Vl/η faible. Considérons de plus que cet écoulement s'étend dans un domaine de très grande taille L , si bien que le champ magnétique dispose d'une grande échelle pour se développer. Le nombre de Reynolds magnétique à grande échelle VL/η est grand. Ecrivons alors le champ magnétique sous la forme $\vec{B} + \vec{b}$, où \vec{B} est une composante à grande échelle, et $\vec{b} \ll \vec{B}$ est une composante à petite échelle. Considérons une moyenne glissante $\langle \dots \rangle$ sur une taille intermédiaire entre l et L . Ecrivons la moyenne de l'équation d'induction, puis retranchons cette moyenne à l'équation d'induction, pour obtenir approximativement les équations :

$$\partial_t \vec{B} = \vec{\nabla} \times \langle \vec{v} \times \vec{b} \rangle + \eta \Delta \vec{B} \quad (1.10)$$

$$\eta \Delta \vec{b} = -(\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \quad (1.11)$$

Pour simplifier ces équations, nous avons utilisé le fait que $\vec{b} \ll \vec{B}$, que les dérivées spatiales de \vec{v} et \vec{b} sont beaucoup plus grandes que celles de \vec{B} , et que le champ \vec{b} suit adiabatiquement les variations de \vec{B} dans la limite $Vl/\eta \ll 1$. La deuxième des équations précédentes permet d'obtenir une expression de \vec{b} en fonction de \vec{B} , qui peut être reportée dans la première équation. Le terme $\langle \vec{v} \times \vec{b} \rangle$ est alors linéaire en \vec{B} , et s'écrit sous la forme $\vec{\alpha} \vec{B}$, où $\vec{\alpha}$ s'appelle le "tenseur d'effet alpha". L'équation sur le champ grande échelle prend alors la forme fermée :

$$\partial_t \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{\alpha} \vec{B} + \eta \Delta \vec{B} \quad (1.12)$$

Avec un écoulement bien choisi, le tenseur d'effet α permet d'amplifier du champ magnétique. L'écoulement le plus simple qui met en évidence cet effet est sans doute l'écoulement de G.O. Roberts, un écoulement cellulaire formé d'une juxtaposition d'écoulements hélicoïdaux. De manière générale, les écoulements qui réalisent l'effet α de manière efficace possède des lignes de courant en forme d'hélice. Le mécanisme par lequel un champ de vitesse hélicoïdal induit du champ magnétique est représenté sur la figure 1.3 : considérons une ligne de champ perpendiculaire à l'axe de l'hélice. Imaginons que cette ligne de champ soit une corde gelée dans le fluide. Si l'on prend cette corde dans son poing, et que l'on avance ce poing en le tournant d'un quart de tour, selon un mouvement hélicoïdal, on crée une boucle de champ magnétique. On induit donc du champ selon l'autre composante perpendiculaire à l'axe de l'hélice.

Bien que le terme d'effet α n'ait de sens en toute rigueur que dans la limite d'une séparation d'échelles entre le champ de vitesse et le champ magnétique, il est parfois utilisé abusivement pour désigner le processus par lequel un champ de vitesse hélicoïdal amplifie du champ magnétique. L'expérience dynamo de Karlsruhe a produit un champ dynamo à l'aide d'une juxtaposition d'écoulements hélicoïdaux, tandis que l'expérience de Riga a produit du champ à l'aide d'une

seule hélice de vitesse de plus grande taille. La question de savoir si un écoulement turbulent peut posséder spontanément les petites échelles hélicoïdales nécessaires à l'amplification d'un champ magnétique constitue le problème encore ouvert de "l'effet α turbulent".

L'effet dynamo est l'instabilité d'un champ de vecteur. En général, le mécanisme de cette instabilité comprend aux moins deux étapes, qui font intervenir deux composantes du champ magnétique : les effets inductifs produisent une composante de champ magnétique B_2 à partir du champ initial B_1 . Cette nouvelle composante B_2 est à nouveau transformée par l'écoulement pour venir ré-amplifier B_1 . Chacune de ces deux étapes peut être réalisée au choix par de l'effet α ou de l'effet ω . Selon les mécanismes mis en jeu, on parlera donc de dynamo α^2 , $\alpha\omega$, ou ω^2 . Nous montrerons dans un chapitre ultérieur qu'une de ces deux étapes de conversion peut également être réalisée non pas au sein du fluide, mais au sein d'une paroi dont la perméabilité magnétique ou la conductivité serait structurée spatialement.

1.1.3 Rétroaction du champ magnétique sur le champ de vitesse

Une fois le seuil dynamo atteint, des perturbations de champ magnétique peuvent croître exponentiellement dans le temps. Quand le champ magnétique devient suffisamment intense, la force de Lorentz réagit sur l'écoulement. Dans le plus simple des cas, elle freine l'écoulement, et limite ainsi la croissance du champ magnétique, qui sature. L'équation qui régit le mouvement du fluide est donc l'équation de Navier-Stokes, à laquelle est ajoutée la force de Lorentz. Pour un fluide de densité ρ et de viscosité cinématique ν , cette équation s'écrit :

$$\partial_t \vec{v} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\vec{\nabla} \frac{P}{\rho} + \nu \Delta \vec{v} + \frac{1}{\rho \mu_0} (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \times \vec{B} \quad (1.13)$$

Remarquons que cette équation, comme l'équation d'induction, est invariante par changement de signe du champ magnétique. Si \vec{B} est une solution du problème complet, $-\vec{B}$ est également une solution. Nous verrons dans ce chapitre que l'effet de la force de Lorentz n'est pas toujours une simple saturation du champ magnétique : elle peut être responsable de branches sous-critiques de champ magnétique, ainsi que d'une bistabilité entre un régime de champ magnétique stationnaire et un régime oscillant.

1.2 La dynamo Von Karman Sodium

1.2.1 Dispositif expérimental

L'expérience Von Karman Sodium a été conçue dans le but d'observer l'effet dynamo au sein d'un écoulement turbulent non contraint. La géométrie utilisée est celle de l'écoulement de Von Karman : deux disques de rayon $R = 155 \text{ mm}$ munis de pales de hauteur 41 mm tournent l'un en face de l'autre dans une cuve cylindrique de rayon 289 mm et de longueur 606 mm , ce qui produit un écoulement fortement turbulent. On note F_1 et F_2 les fréquences de rotation des disques.

On appelle régime de contra-rotation exacte le régime où les deux disques tournent à la même vitesse et en sens opposés ($F_1 = F_2$). L'écoulement moyen obtenu dans ce régime est schématisé sur la figure 1.4. Il se compose d'une forte rotation différentielle, puisque la vitesse azimutale est égale à la vitesse de chacun des disques à leur contact. A ceci s'ajoute une recirculation poloidale : le fluide est entraîné vers l'extérieur par la force centrifuge au voisinage des disques, et revient vers l'axe du cylindre dans le plan central de la cuve. Précisons que les pales des

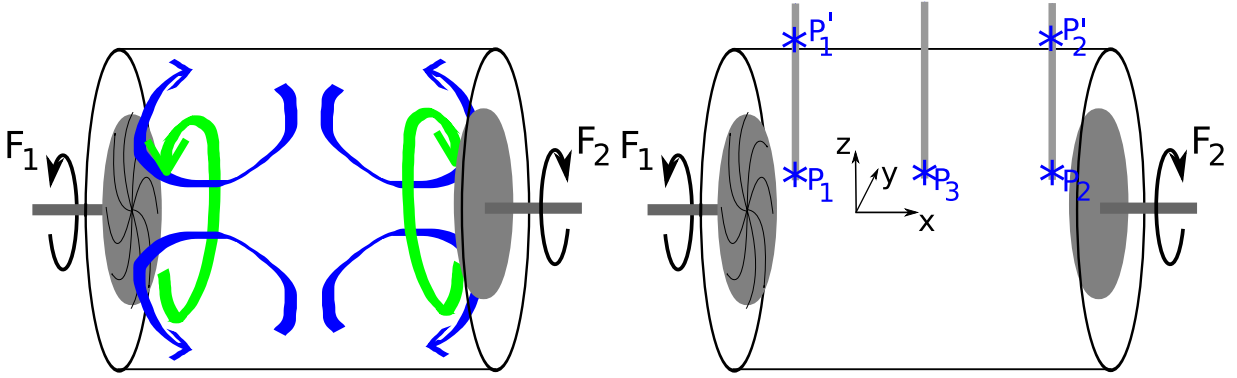


FIGURE 1.4 – A gauche : Représentation schématique de l'écoulement moyen obtenu en contre-rotation exacte. A la rotation différentielle s'ajoute une recirculation poloidale. A droite : Position des sondes de mesures.

disques sont courbées, si bien que l'écoulement obtenu n'est pas exactement le même suivant le sens de rotation des disques.

La cuve contient environ 150 litres de sodium liquide, qui a une faible densité et est très bon conducteur électrique. Sa viscosité cinématique vaut $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$, sa conductivité électrique $\sigma = 10^7 \text{ } \Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$, et sa densité $\rho = 930 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. Le sodium fond à 97 degrés Celsius, et les expériences sont effectuées entre 110 et 160 degrés. Les disques sont entraînés en rotation par 4 moteurs de 75kW, ce qui permet d'atteindre une fréquence de rotation maximale de l'ordre de 25 Hz, soit un nombre de Reynolds de l'ordre de 10^6 . Précisons que l'effet dynamo n'a été observé dans l'expérience que lorsqu'un au moins des disques et ses pales sont en fer doux, un matériau fortement ferromagnétique. Le rôle de ce matériau ferromagnétique sera discuté au chapitre 4. Les mesures de champ magnétique sont effectuées à l'aide de sondes à effet Hall dont le positionnement est représenté sur la figure 1.4. Nous discuterons des mesures effectuées en profondeur (capteurs P1, P2, P3), ainsi que des mesures réalisées en bord de cuve (capteurs P'1, P'2). Lorsque l'on fera référence à l'expérience, on utilisera soit le système de coordonnées cartésiennes représenté sur la figure 1.4, soit des coordonnées cylindriques, la coordonnées axiale étant orientée depuis le disque 1 vers le disque 2. On définit enfin les deux nombres de Reynolds magnétiques $Rm_{1,2} = \mu_0 \sigma 2\pi R^2 F_{1,2}$.

1.2.2 Effet dynamo et régimes dynamiques

L'effet dynamo est observé en contre-rotation exacte lorsque la fréquence de rotation des disques dépasse 13 Hz, soit un nombre de Reynolds magnétique critique $Rm_1 = Rm_2 \simeq 25$. Des séries temporelles du champ axial mesuré à la position P1 sont représentées sur la figure 1.5. A 12 Hz le champ magnétique est très proche de zéro, et présente des fluctuations dues à l'induction par l'écoulement sur le champ magnétique terrestre. A 14 Hz le champ magnétique est beaucoup plus fort, il a une moyenne temporelle non nulle et présente de fortes fluctuations autour de cette valeur moyenne du fait de la turbulence de l'écoulement. On représente également une courbe de bifurcation du champ magnétique, mesuré à la position P3 : le champ semble bifurquer continuellement à partir de zéro. Notons que des mesures ont fait apparaître une légère sous-criticalité au voisinage du seuil, en particulier en début de campagne de mesure. Cette sous-criticalité pourrait venir des disques ferromagnétiques, qui ont besoin de s'aimanter dans la bonne direction pour produire l'effet dynamo. Notons de plus que le champ semble croître à peu près linéairement en l'écart au seuil dynamo, alors qu'une bifurcation fourche prévoit un comportement en racine

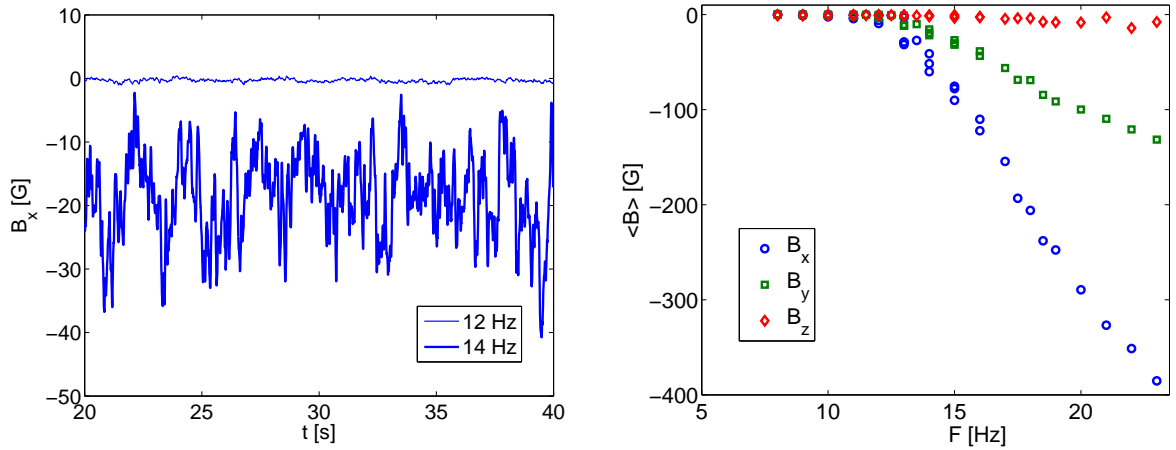


FIGURE 1.5 – A gauche : Champ magnétique axial mesuré de part et d’autre du seuil dynamo, à la position P1. A droite : Courbe de bifurcation du champ magnétique mesuré à la position P3.

carré. Encore une fois, on ne peut pas exclure l’hypothèse selon laquelle ce comportement aurait pour origine une imperfection due à l’aimantation rémanente des disques ferromagnétiques.

Des mesures effectuées en différents points de l’expérience montrent que le champ magnétique moyen est dominé par un dipôle aligné avec l’axe de l’expérience : en contra-rotation, on mesure un fort champ poloidal dans l’axe de la cuve autour duquel un champ azimuthal tourne dans le sens indirect. Le champ poloidal reboucle en périphérie de la cuve. On a observé dans l’expérience les deux orientations de ce dipôle axial, en accord avec la symétrie $\vec{B} \rightarrow -\vec{B}$ des équations de la magnétohydrodynamique.

Un des points forts de l’expérience VKS est qu’elle possède deux paramètres de contrôle, qui sont les deux fréquences de rotation F_1 et F_2 des disques. En faisant varier indépendamment ces deux fréquences, on modifie la géométrie de l’écoulement qui produit le champ magnétique. Si l’on s’éloigne de la contra-rotation exacte $F_1 = F_2$, on conserve un champ stationnaire lorsque $|F_1 - F_2|$ est faible, avant d’observer un champ oscillant dans le temps pour une plus grande différence de fréquences. Une série temporelle du champ magnétique mesuré aux positions P1 et P’2 est représentée sur la figure 1.6 pour $F_1 = 25 \text{ Hz}$ et $F_2 = 18 \text{ Hz}$. On observe une oscillation cohérente des trois composantes du champ magnétique mesuré en P1. De plus, cette oscillation est cohérente avec le champ selon y mesuré en P’2, si bien que la structure de champ magnétique mise en jeu dans l’oscillation s’étend sur toute la taille de la cuve. Enfin, il est frappant de constater combien le signal est périodique, et ce malgré les fortes fluctuations turbulentes : le champ magnétique possède des fluctuations erratiques autour d’un “signal moyen” qui lui ne semble pas du tout affecté par ces fluctuations. Ceci est la signature d’une dynamique sous-jacente déterministe, et de basse dimensionalité, c’est-à-dire qui met en jeu peu de modes.

Pour observer un effet des fortes fluctuations turbulentes sur cette dynamique, il faut se placer au voisinage de la frontière entre dynamo stationnaire et dynamo oscillante. Sur la figure 1.7 est représentée une série temporelle du champ selon y mesuré à la position P’2 pour $F_1 = 22.5 \text{ Hz}$ et $F_2 = 18.75 \text{ Hz}$: le champ reste longtemps dans une polarité donnée, avant de se renverser soudainement pour rejoindre l’autre polarité. Ces renversements se produisent de manière erratique dans le temps et ne sont pas sans rappeler ceux du champ magnétique terrestre [10]. L’espace des régimes dynamo observés en fonction de F_1 et F_2 est représenté sur la figure

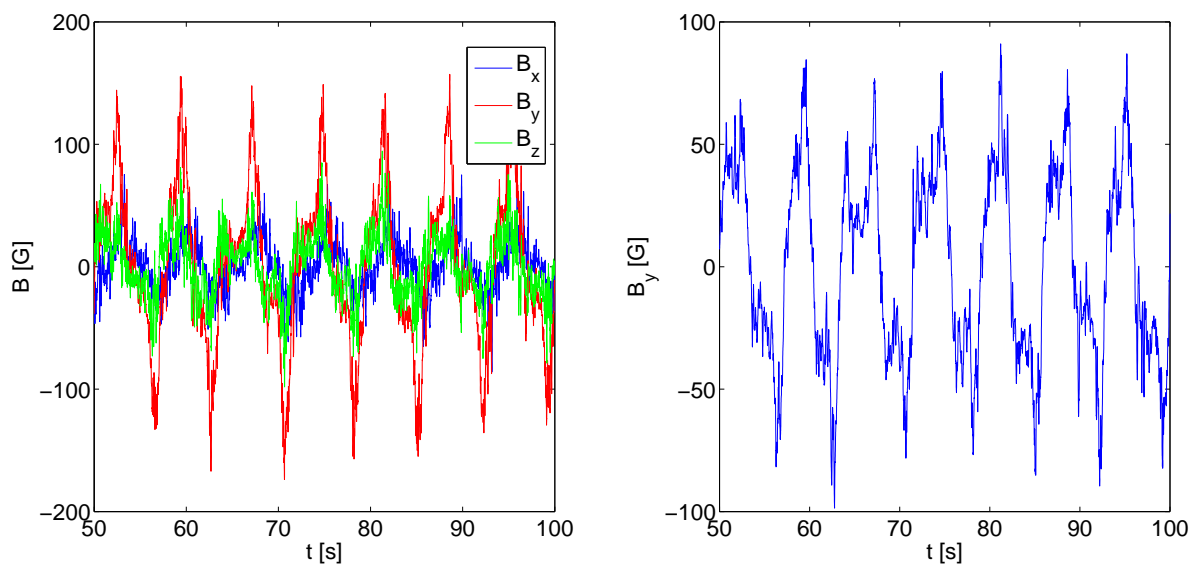


FIGURE 1.6 – Oscillation du champ magnétique mesuré en régime décalé ($F_1 = 25 \text{ Hz}$ et $F_2 = 18 \text{ Hz}$). On représente les trois composantes du champ à la position P1 (à gauche) et le champ selon y mesuré en P'2 (à droite).

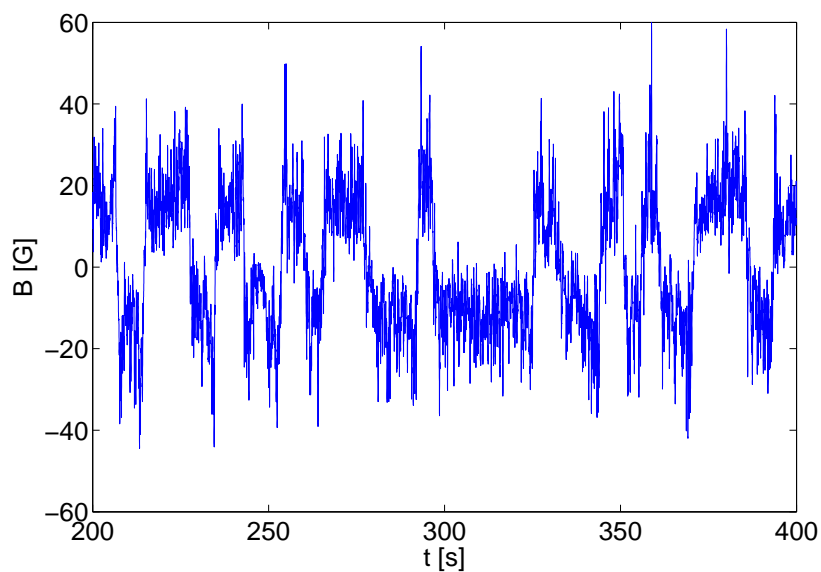


FIGURE 1.7 – Champ selon y mesuré au point P'2, dans un régime de renversements erratiques ($F_1 = 22.5 \text{ Hz}$, $F_2 = 18.75 \text{ Hz}$).

1.8, pour deux configurations expérimentales différentes : la première configuration correspond aux mesures décrites précédemment. Les données sont issues d'une campagne de deux semaines de mesures intitulée VKS2R. La seconde configuration correspond à une campagne de mesure nommée VKS2J, pour laquelle un cylindre interne de cuivre, de rayon 206 mm et d'épaisseur 4 mm a été placé dans la cuve. L'espace des paramètres s'en trouve un peu complexifié, mais on observe toujours la même phénoménologie, à savoir des poches d'oscillation aux frontières desquelles sont éventuellement observés des renversements erratiques du champ magnétique.

1.2.3 Dynamique de basse dimensionalité

Comme nous l'avons évoqué précédemment, le fait que les régimes dynamiques observés soient cohérents spatialement sur la taille de l'expérience et peu affectés par la turbulence de l'écoulement est un signe que la dynamique implique uniquement quelques modes de champ magnétique couplés. On peut en pratique se contenter de deux modes de champs magnétiques : un mode de symétrie dipolaire et un mode de symétrie quadrupolaire, qui à grande échelle sont axisymétriques. Ils sont représentés sur la figure 1.9. L'hypothèse principale est que ces deux modes ont des seuils dynamo très proches. De nombreux exemples de calculs dynamo cinématiques dans des géométries similaires ont mis en évidence cette proximité de seuil des modes dipolaire et quadrupolaire ([11], [12], et résultats du chapitre 2). En ce qui concerne l'expérience VKS en contra-rotation exacte, l'argument suivant permet de justifier cette hypothèse : dans la limite où les disques seraient infiniment éloignés l'un de l'autre, chacun des disques pourrait créer un champ axisymétrique $\pm \vec{B}$ en son voisinage, et ne "verrait" pas le champ créé par l'autre disque. Autrement dit, les modes localisés près de chacun des disques auraient le même seuil dynamo. Si l'on rapproche maintenant les disques, les modes magnétiques créés par chacun des disques deviennent légèrement couplés : si les deux champs sont alignés l'un par rapport à l'autre, on obtient un mode dipolaire. Si ils pointent dans des directions opposés, le mode est quadrupolaire. Ces deux modes - dipolaire et quadrupolaire - ont alors des seuils différents, mais très proches dans la limite où les disques sont encore éloignés l'un de l'autre.

Lors des mesures de VKS, les fréquences de rotation des disques atteignent au maximum deux fois la fréquence critique de la dynamo. Autrement dit, on reste toujours proche du seuil. Dans ce cas, seuls les deux modes dipolaire $\vec{D}(x, y, z)$ et quadrupolaire $\vec{Q}(x, y, z)$ sont potentiellement instables, tandis que tous les modes magnétiques plus structurés sont fortement amortis. On écrit alors le champ magnétique sous la forme $\vec{B} = d(t)\vec{D} + q(t)\vec{Q}$, et l'évolution temporelle du système est alors régie par un système dynamique du premier ordre en temps qui couple les amplitudes $d(t)$ et $q(t)$. D'un point de vue mathématique, c'est le théorème de la variété centrale qui assure que l'on peut prendre en compte uniquement ces deux modes au voisinage de leur seuil. Dans le cas où l'écoulement est simple, les techniques de développement faiblement non-linéaire permettent ensuite d'écrire les équations du système dynamique. Par ce processus, on simplifie énormément le problème à résoudre, puisque l'on passe de l'infinité de degrés de liberté que représente le champ $\vec{B}(x, y, z, t)$ aux deux degrés de liberté que sont les amplitudes $d(t)$ et $q(t)$.

Dans le cas présent, c'est à l'aide d'arguments de symétrie que nous allons obtenir le système d'équations qui couple les amplitudes des deux modes magnétiques. Considérons la variable complexe $A(t) = d(t) + iq(t)$. La symétrie $\vec{B} \rightarrow -\vec{B}$ impose l'invariance $A \rightarrow -A$ de l'équation cherchée. Si on se limite aux termes non linéaires d'ordre trois, on peut alors écrire :

$$\dot{A} = \mu A + \nu \bar{A} + \beta_1 A^3 + \beta_2 A^2 \bar{A} + \beta_3 A \bar{A}^2 + \beta_4 \bar{A}^3 \quad (1.14)$$

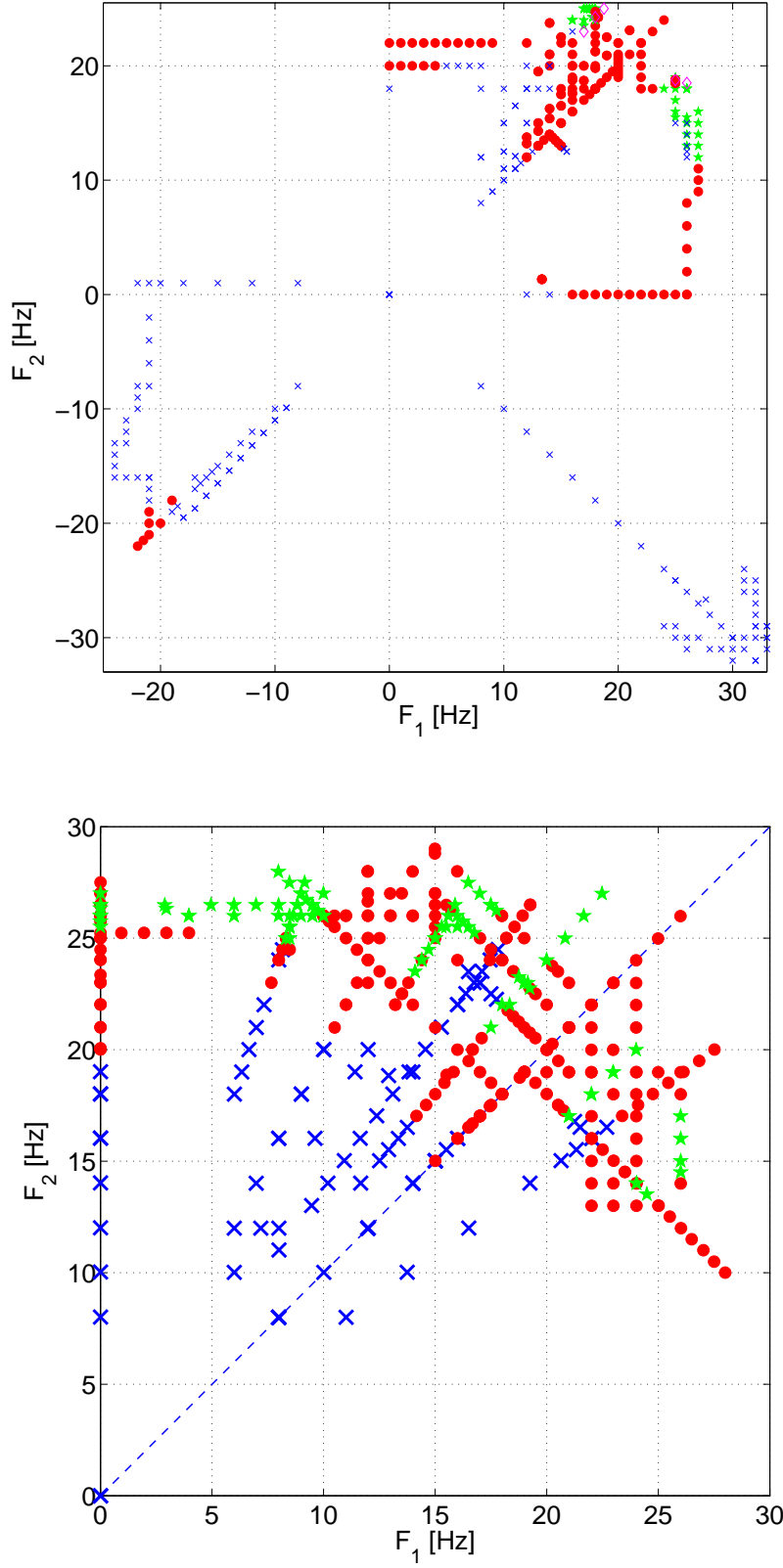


FIGURE 1.8 – En haut : Espace des paramètres de l'expérience VKS2 (campagne R). En bas : Modification de cet espace des paramètres lorsque l'on ajoute un cylindre interne en cuivre (campagne J). croix : pas de dynamo, rond : dynamo stationnaire, étoiles : régimes dynamiques. Les losanges dans VKS2R désignent plus particulièrement les renversements aléatoires.

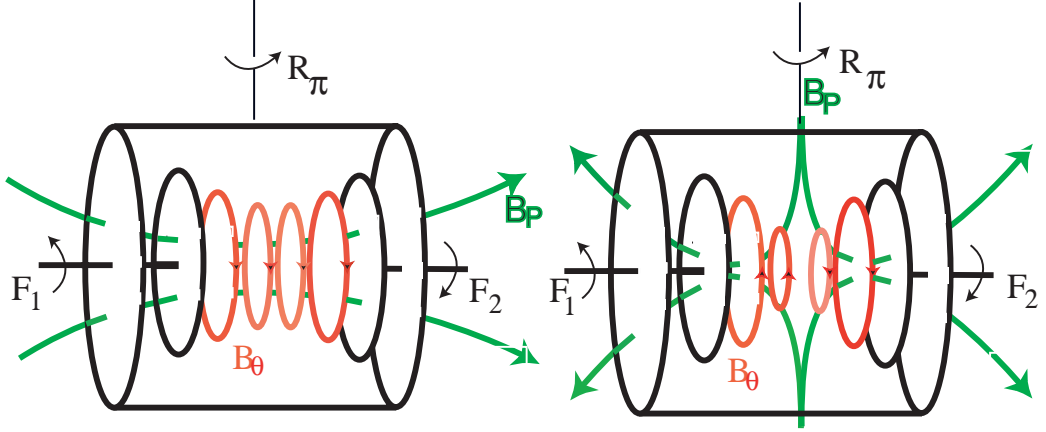


FIGURE 1.9 – Représentation schématique des modes dipolaire (à gauche) et quadrupolaire (à droite). Le premier est changé en son opposé par la rotation \mathcal{R}_π , tandis que le second est invariant.

L'autre symétrie importante dans ce système est une rotation d'angle π autour d'un axe radial situé dans le plan médian de l'expérience. On appelle \mathcal{R}_π cette symétrie. Elle est représentée sur la figure 1.9 : en contra-rotation exacte, elle laisse le dispositif expérimental inchangé. En régime décalé, elle échange les disques 1 et 2. Par ailleurs, elle transforme le dipôle magnétique en son opposé, tandis qu'elle laisse invariant le quadrupôle. En contra-rotation exacte, cette symétrie impose donc l'invariance $A \rightarrow -\bar{A}$ de l'équation d'amplitude. On en déduit que dans cette situation les coefficients de l'équation d'amplitude sont réels. Si l'on brise légèrement la symétrie \mathcal{R}_π en imposant $F_1 \neq F_2$, la partie imaginaire de ces coefficients devient non-nulle, et est au premier ordre linéaire en $F_1 - F_2$. Écrivons donc $\mu = \mu_r + i\mu_i$, $\nu = \nu_r + i\nu_i$, et étudions la stabilité linéaire de la solution $A = 0$: le système a deux valeurs propres. En contra-rotation exacte, $\mu_i = \nu_i = 0$, et les deux modes propres sont le dipôle et le quadrupôle. Leurs taux de croissance sont respectivement $\mu_r + \nu_r$ et $\mu_r - \nu_r$. En régime décalé, ces deux taux de croissance deviennent :

$$s_{\pm} = \mu_r \pm \sqrt{|\nu|^2 - \mu_i^2} \quad (1.15)$$

Considérons dans un premier temps le cas simple où $|\mu_i|$ augmente avec $F_1 - F_2$, alors que ν_i varie peu. Lorsque l'on brise la symétrie, l'argument de la racine carrée diminue jusqu'à devenir négatif. On passe donc d'un point fixe qui a deux directions instables à un foyer instable, correspondant à une bifurcation de Hopf. Le résultat de cette analyse linéaire est résumé sur la figure 1.10 : lorsque μ_r augmente, la bifurcation observée est stationnaire si $|\mu_i| < |\nu|$ et oscillante dans le cas contraire. Le point $(\mu_r = 0, \mu_i = |\nu|)$ est un point où le système est au seuil à la fois d'une bifurcation stationnaire et d'une bifurcation oscillante. Un tel point s'appelle un point de codimension 2. En son voisinage le système a une dynamique particulièrement riche, qui sera décrite dans le cadre de l'étude de la bistabilité du champ magnétique.

Remarquons que si ν_i croît plus vite que μ_i quand on brise la symétrie, on ne pourra jamais avoir $|\mu_i| > |\nu|$, et on ne pourra voir de bifurcation oscillante. Cette situation sera décrite en

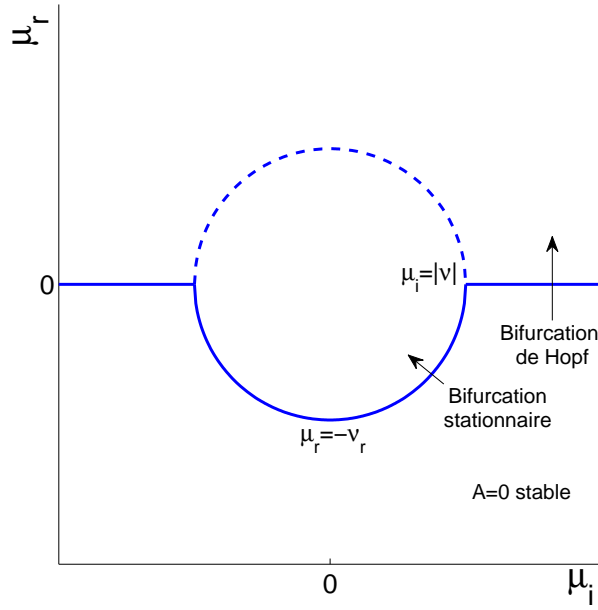


FIGURE 1.10 – Stabilité linéaire de la solution $A = 0$. En franchissant le demi-cercle en trait plein, le point fixe $A = 0$ acquiert une direction instable. En franchissant le demi-cercle tireté, il en acquiert une deuxième. Suivant l'importance de la brisure de symétrie, la bifurcation peut être stationnaire ou oscillante.

détails au chapitre suivant.

Considérons maintenant le cas simple où les termes non-linéaires ont pour seul effet de saturer l'instabilité : trois espaces des phases (d, q) sont représentés sur la figure 1.11. En contra-rotation exacte, et pour $\nu_r > 0$, le système dynamique possède un point fixe stable correspondant à une solution de symétrie dipolaire, et un point fixe instable correspondant à une solution quadrupolaire. Du fait de l'invariance $\vec{B} \rightarrow -\vec{B}$, il existe les symétriques de ces deux points fixes par rapport à 0, ce qui fait un total de quatre points fixes. Lorsque l'on brise légèrement la contra-rotation exacte, les points fixes se rapprochent par paires, et le champ magnétique observé est maintenant un mélange de dipôle et de quadrupôle. Pour une valeur critique de la brisure de symétrie, les points fixes collisionnent deux à deux, avant de disparaître. C'est une bifurcation noeud-col, qui conduit à la formation d'un cycle limite qui relie les polarités $+\vec{B}$ et $-\vec{B}$. On explique ainsi très simplement le mécanisme qui permet de passer d'un champ stationnaire à une oscillation non-linéaire lorsque l'on se décale de la contra-rotation exacte dans l'expérience VKS. De plus, peu avant la bifurcation noeud-col, le point fixe stable est très proche d'un point instable, si bien que les fluctuations turbulentes peuvent suffire à faire passer le système de l'autre côté du point fixe instable : le système est alors attiré de manière déterministe vers le point fixe de polarité opposé. On obtient ainsi un mécanisme simple par lequel des fluctuations d'amplitude arbitrairement faible peuvent déclencher des renversements erratiques du champ magnétique, pour peu que l'on soit suffisamment proche de la frontière stationnaire-oscillant. Ceci explique que les renversements de champ magnétique soient observés en bordure des poches d'oscillation de l'espace des paramètres. La dynamique déterministe fait également passer le dipôle par un maximum (en valeur absolue) avant de rejoindre le point fixe stable : ce maximum, désigné par le terme anglais "overshoot", est également observé à la fin d'un renversement de l'expérience VKS. La simulation de l'équation précédente, sur laquelle on bruite légèrement les coefficients, permet de

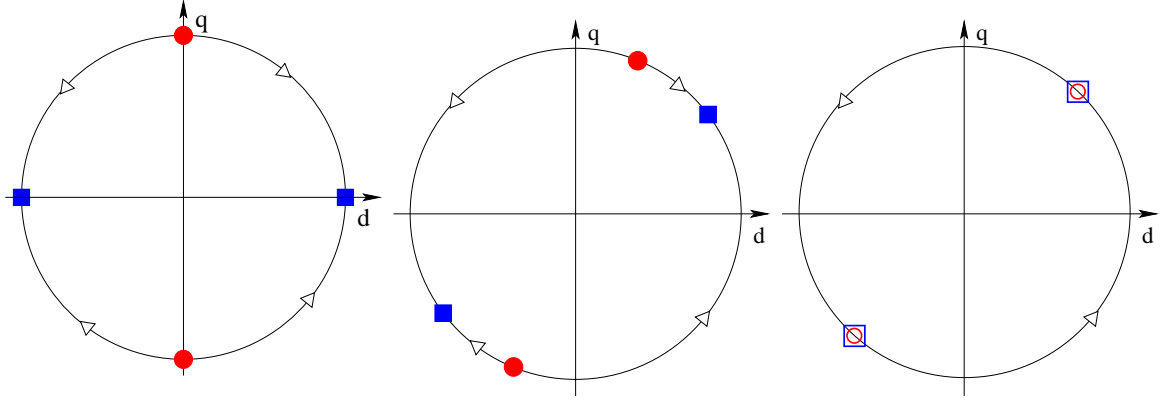


FIGURE 1.11 – Espaces des phases dans le plan dipôle-quadrupôle. A gauche : en contra-rotation exacte, au-dessus des seuils du dipôle et du quadrupôle. Au centre : régime faiblement décalé. A droite : au seuil de la bifurcation noeud-col. Les carrés représentent des points fixes stables, et les ronds des points fixes instables.

produire des séries temporelles de renversements très proches des observations expérimentales. En particulier, on observe des renversements ratés, ou excursions, pour lesquels le système se rapproche du point fixe instable sans passer de l'autre côté, si bien qu'il relaxe finalement vers le point fixe stable initial. Plus de détails sur ce mécanisme de renversements et sur sa comparaison aux données expérimentales peuvent être trouvés dans les références [13], [14], et [15].

1.2.4 Bistabilité entre un champ stationnaire et un champ oscillant

Dans la campagne VKS2J, si on augmente la vitesse de rotation du disque 2 tout en maintenant le disque 1 à l'arrêt, on observe une dynamo stationnaire. Le diagramme de bifurcation de cette dynamo stationnaire est représenté sur la figure 1.12. Toutes les mesures décrites dans ce paragraphe sont effectuées à la position P1. Si maintenant on arrête le disque 1 progressivement alors que le disque 2 tourne à grande vitesse, on peut conserver une dynamo oscillante : le champ magnétique est donc bistable entre une solution stationnaire et une solution oscillante [16]. Trois chemins différents dans l'espace des paramètres sont représentés sur la figure 1.13 afin d'illustrer cette bistabilité. La série temporelle représentée en dessous montre comment, à partir d'un champ stationnaire, on peut obtenir une dynamo oscillante en faisant tourner le disque 1 pendant un bref instant.

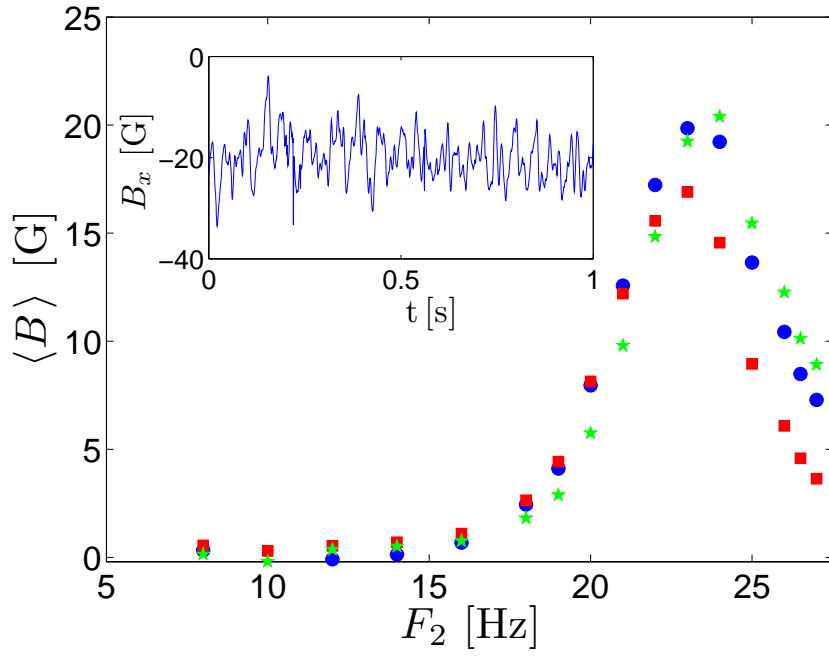


FIGURE 1.12 – Diagramme de bifurcation de la solution stationnaire (ronds : $-\langle B_x \rangle$, carrés : $-\langle B_y \rangle$, étoiles : $\langle B_z \rangle$). Insert : série temporelle pour $F_1 = 0$ Hz et $F_2 = 24$ Hz.

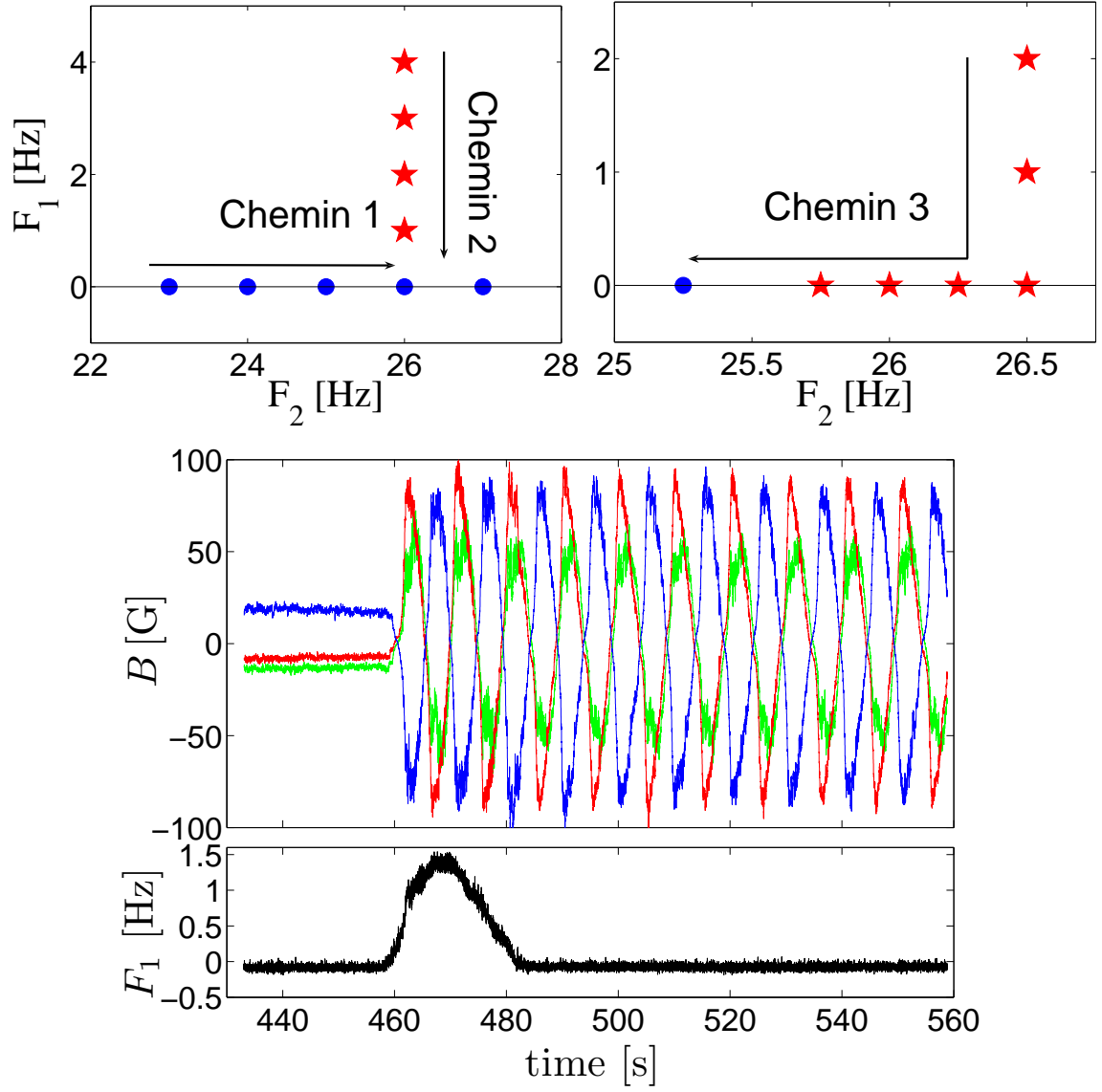


FIGURE 1.13 – En haut : Trois chemins dans l'espace des paramètres mettant en évidence la dynamo bistable (ronds : dynamo stationnaire, étoiles : champ oscillant). En bas : en faisant tourner un bref instant le disque 1, on passe d'un champ stationnaire à un champ oscillant.

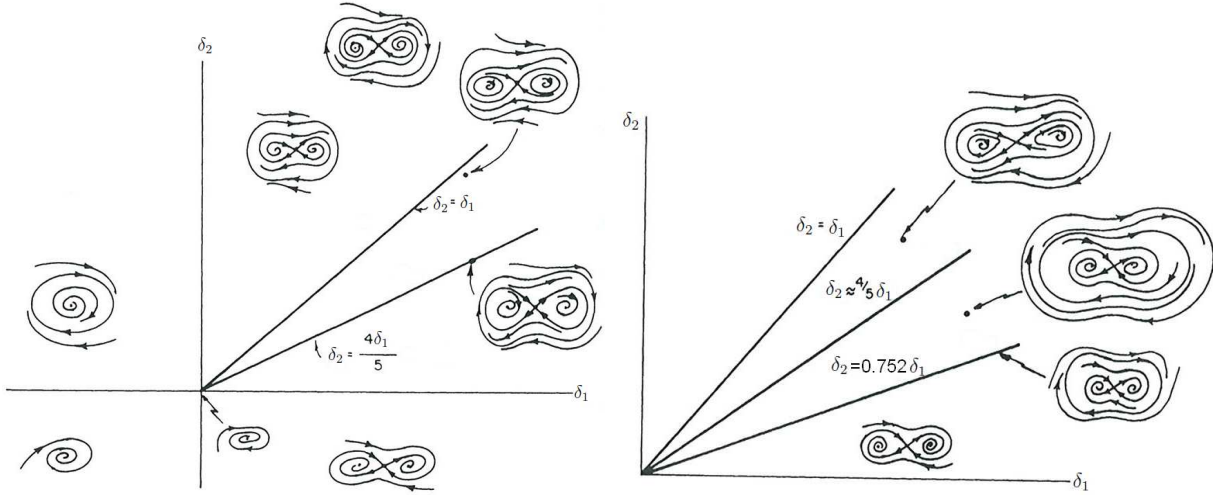


FIGURE 1.14 – Espace des paramètres de la forme normale de codimension 2 (image issue de [17]).

Ce type de bistabilité entre un état stationnaire et un état oscillant est caractéristique de l'évolution d'un système au voisinage d'un point de codimension 2, c'est-à-dire au voisinage du point où 0 est une valeur propre double du problème linéaire. Comme nous l'avons vu, un tel point existe dans le modèle à deux modes de champ magnétique pour $|\mu_i| = |\nu|$. En ce point le système est à la fois au seuil d'une bifurcation stationnaire et d'une bifurcation oscillante. Le comportement générique d'un tel système est décrit par la forme normale de codimension 2 :

$$\dot{x} = y \quad (1.16)$$

$$\dot{y} = \delta_1 x + \delta_2 y - x^2 y - x^3 \quad (1.17)$$

dont l'étude exhaustive est décrite dans le livre de Guckenheimer et Holmes [17]. Le schéma 1.14 en résume l'espace des paramètres. Il contient quatre frontières principales :

- La frontière $\delta_1 = 0$, pour $\delta_2 < 0$, représente le seuil d'une instabilité stationnaire.
- La frontière $\delta_2 = 0$, pour $\delta_1 < 0$, représente le seuil d'une instabilité oscillante.
- A la frontière $\delta_1 \simeq 0.752\delta_2$ se produit une bifurcation noeud-col d'orbites périodiques stable et instable. Il apparaît donc un cycle sous-critique.
- A la frontière $\delta_1 = \delta_2$, les solutions stationnaires disparaissent par collision avec des orbites périodiques instables.

C'est entre ces deux dernières frontières qu'existe une bistabilité du système, puisqu'il possède comme attracteurs deux points fixes et une orbite périodique. L'état du système dépend donc du chemin suivi dans le plan (δ_1, δ_2) .

Le système à deux modes de champ magnétique peut se mettre sous la forme normale de codimension deux au prix de changements de variables. Le calcul est effectué en appendice du chapitre 3 de cette thèse dans un contexte similaire. Afin d'illustrer ce scénario de codimension 2, on cherche une dépendance simple en Rm_2 des coefficients du modèle à deux modes, qui permette de décrire correctement les observations expérimentales. Afin de simplifier le problème, on fixe $\beta_1 = \beta_3 = \beta_4 = 0$, et on suppose qu'au point de mesure l'amplitude du champ est bien représentée par le comportement de la partie réelle de A . Ceci est en accord avec l'espace des phases reconstruit à partir des données expérimentales et représenté sur la figure 1.15 : il est très étiré, si bien que l'amplitude du champ au point de mesure est essentiellement dominée par un

des deux modes. Les coefficients restants sont choisis de manière à décrire correctement les seuils des branches stationnaire et oscillante, les amplitudes et fréquences d'oscillation, et le maximum d'amplitude de la branche stationnaire. On obtient $\nu_r = 0.27$, $\nu_i = 0.52$, $\mu_r = 0.043Rm_2 - 1.74$, $\mu_i = 1.45 - 0.026Rm_2$, $\beta_2 = 10^{-5}(-0.95 + 1.9i)$. Le modèle présente une bifurcation stationnaire en $Rm_2 = 35.7$ et une bistabilité avec une branche oscillante pour $Rm_2 > 46.1$. On compare sur la figure 1.15 les amplitudes des solutions stationnaire et oscillante issues du modèle, ainsi que les fréquences d'oscillation correspondantes, avec les données expérimentales. L'accord est bon, le comportement critique au voisinage du seuil étant vraisemblablement affecté par des effets d'aimantation du ferromagnétique qui ne sont pas pris en compte par le modèle.

Cette phénoménologie de bistabilité entre dynamo stationnaire et dynamo oscillante est aussi rencontrée en bordure de certaines poches d'oscillation de l'espace des paramètres. Globalement, l'intégralité des transitions entre dynamo stationnaire et dynamo oscillante observées jusqu'ici dans l'expérience VKS se font soit par une bifurcation noeud-col, auquel cas on observe des renversements erratiques près de la transition, soit par un mécanisme de codimension deux, auquel cas on observe une bistabilité entre un champ stationnaire et un champ oscillant.

La dynamique à deux modes du champ magnétique constitue la motivation principale des deux chapitres suivants de cette thèse. Dans le second chapitre, nous étudierons un modèle très simplifié de dynamo cinématique, pour lequel nous expliciterons le passage de l'équation d'induction à l'équation qui régit l'évolution des amplitudes des modes dipolaire et quadrupolaire. On se contentera dans ce chapitre d'une analyse linéaire. Le troisième chapitre met l'accent sur l'analogie entre le problème des renversements du champ magnétique et celui de la dérive d'un motif périodique dans un domaine de taille finie. En effet, un motif périodique peut présenter une dérive lorsque l'on brise la symétrie discrète $x \rightarrow -x$. Cette dérive résulte alors du couplage de deux modes qui se transforment différemment sous l'effet de cette symétrie discrète. L'équation qui régit les amplitudes de ces deux modes est donc tout à fait similaire à l'équation d'amplitude utilisée pour décrire les renversements du champ magnétique. Néanmoins, le problème de la dérive d'un motif périodique est plus simple et intuitif, si bien que l'on effectuera le calcul complet dans les régimes linéaire et non-linéaire. Nous décrirons en détail l'espace des paramètres complet du modèle à deux modes, l'obtention de la forme normale de codimension deux, ainsi que le passage du scénario de codimension deux à la bifurcation noeud-col.

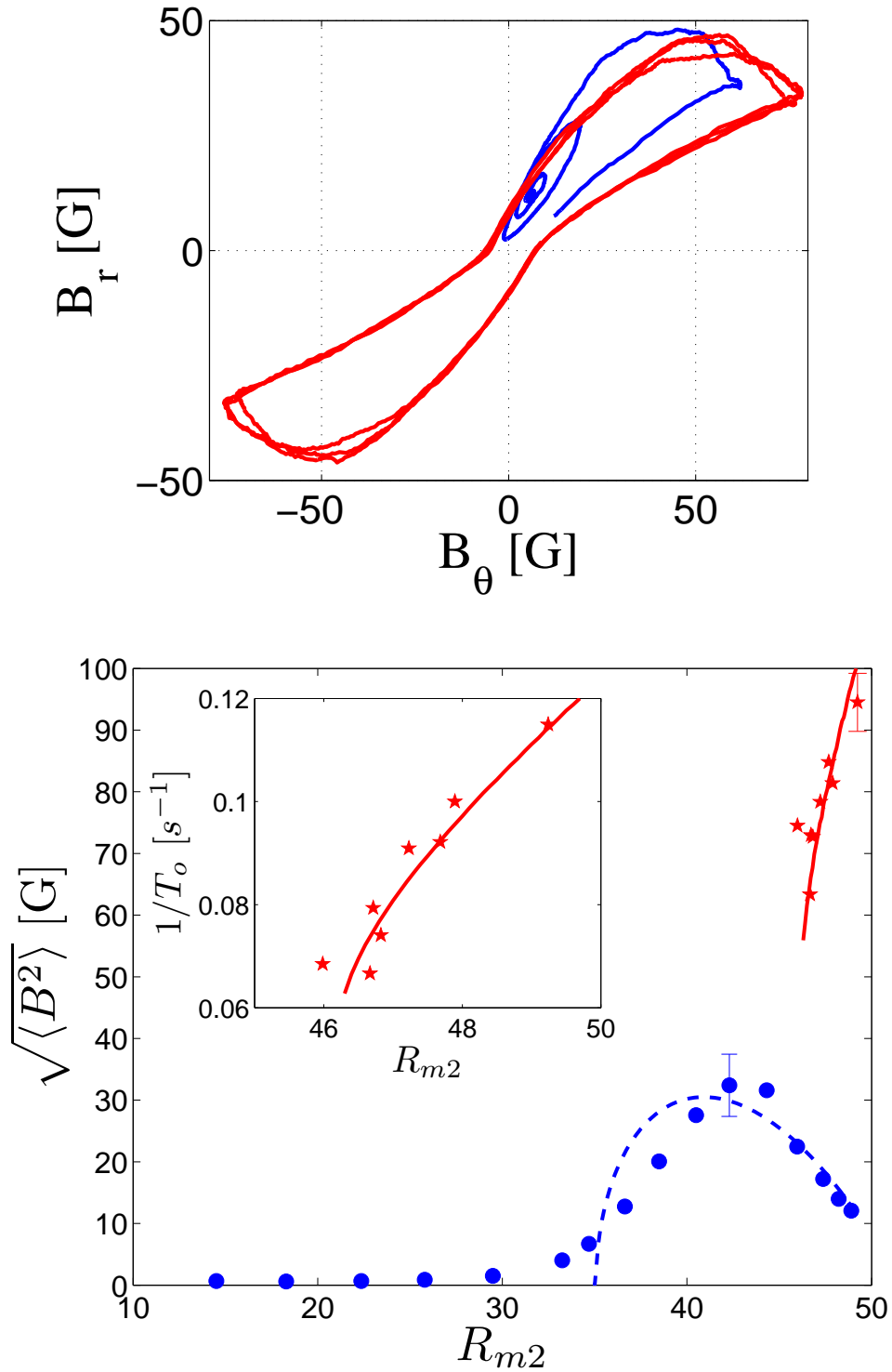


FIGURE 1.15 – En haut : Espace des phases reconstruit à partir des données expérimentales pour $F_2 = 26Hz$. Suivant la condition initiale, le système est attiré par un point fixe ou par un cycle limite. En bas : amplitude du champ et fréquences d'oscillations issues de l'expérience (ronds : dynamos stationnaires, étoiles : dynamos oscillantes) et du modèle (ligne tiretée : solution stationnaire, ligne pleine : solution oscillante).

Chapitre 2

Dynamo α^2 sphérique : régimes dynamiques du champ magnétique

Nous avons vu au chapitre précédent que les régimes dynamiques de l'expérience VKS peuvent être décrits à l'aide de deux modes de champ magnétique couplés. L'objectif de ce chapitre est d'utiliser un modèle simple de dynamo pour expliciter le passage de l'équation d'induction à la détermination de ces régimes dynamiques. Le modèle retenu est une dynamo de type α^2 , avec un effet α localisé sur des coquilles sphériques infiniment fines. Ce modèle est donc très minimaliste du point de vue hydrodynamique et a été choisi uniquement pour rendre les calculs abordables. En particulier, il ne correspond évidemment pas aux effets inductifs que l'on attend dans l'expérience VKS ou dans une dynamo astrophysique. Cependant, nous avons vu au chapitre précédent que l'essentiel de la dynamique du champ magnétique peut être déduit de considérations de symétrie, et ce indépendamment des détails de l'hydrodynamique du système. Ainsi, à l'aide de ce modèle simple nous allons retrouver les principaux régimes dynamiques de l'expérience VKS et de certains objets astrophysiques. De manière plus surprenante, nous verrons qu'il permet également de dégager des conclusions générales sur la géométrie à grande échelle du champ magnétique engendré, et ce sans connaître les détails précis de l'hydrodynamique sous-jacente. Nous décrirons en particulier un mécanisme de localisation hémisphérique du champ magnétique, que nous confronterons aux données expérimentales de VKS, ainsi qu'aux mesures du champ rémanent de Mars et à des cartographies des taches solaires.

2.1 Dynamo cinématique en coquilles sphériques

2.1.1 Position du problème

On se place en géométrie sphérique (coordonnées (r, θ, ϕ)), et on considère un mécanisme dynamo de type α^2 . Pour plus de simplicité, on considère que l'effet α est localisé sur des coquilles sphériques infiniment fines (de tels calculs de dynamo cinématique, où l'écoulement est localisé sur des couches infiniment fines, ont été réalisés pour les dynamos $\alpha\omega$ en géométrie cartésienne [11], et en géométrie sphérique [18]). Le schéma complet du problème considéré est représenté figure 2.1 : un fluide conducteur d'électricité, de diffusivité magnétique η , est placé dans une sphère de rayon R_0 . A l'extérieur de cette sphère se trouve du vide. A l'intérieur de cette sphère se trouvent deux nappes d'effet α : en $r = \chi R_0$, un coefficient d'effet α transforme un champ azimutal en un courant azimutal : on note ce coefficient $\alpha_{\phi\phi}$. En $r = \xi R_0$ se trouve une autre nappe sur laquelle seul le coefficient $\alpha_{\theta\theta}$ du tenseur d'effet α est non nul : ce coefficient transforme du champ poloidal en champ toroidal.

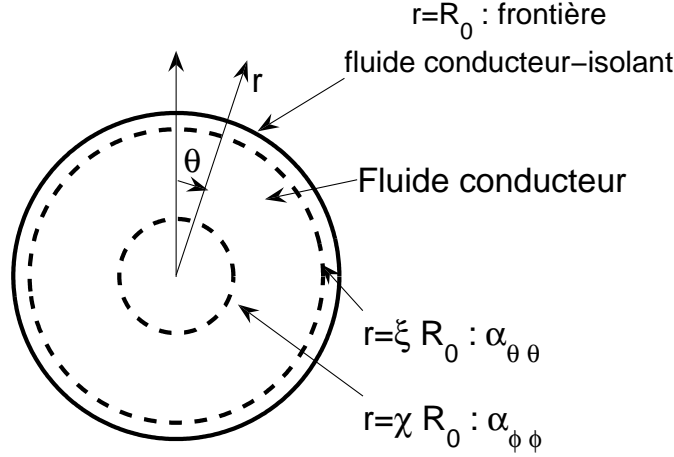


FIGURE 2.1 – Géométrie du problème considéré : du fluide conducteur est placé dans une sphère de rayon R_0 . A l'extérieur de la sphère se trouve du vide. Deux nappes d'effet α situées sur des coquilles sphériques engendrent un champ magnétique axisymétrique.

On suppose de plus que l'effet α est axisymétrique, mais peut être structuré en fonction de la latitude sur la sphère : en notant toujours θ la colatitude, on garde pour ces coefficients d'effet α les dépendances les plus simples en θ , à savoir des variations en $\cos(\theta)$, $\cos(2\theta)$, et $\cos(3\theta)$. Dans la base des coordonnées sphériques, le tenseur d'effet α s'écrit finalement :

$$\overrightarrow{\overrightarrow{\alpha}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{\phi\phi} \end{pmatrix}_{r,\theta,\phi} \quad (2.1)$$

avec :

$$\begin{aligned} \alpha_{\phi\phi} &= \delta(r - \chi R_0) [\tilde{a}_1 + \tilde{b}_1 \cos(\theta) + \tilde{c}_1 \cos(2\theta) + \tilde{d}_1 \cos(3\theta)] \\ \alpha_{\theta\theta} &= \delta(r - \xi R_0) [\tilde{a}_2 + \tilde{b}_2 \cos(\theta) + \tilde{c}_2 \cos(2\theta) + \tilde{d}_2 \cos(3\theta)] \end{aligned}$$

L'effet α utilisé ici présente donc deux types de dépendances en fonction de θ : le terme indépendant de θ et le terme en $\cos(2\theta)$ sont invariants par la symétrie que nous avons appelée \mathcal{R}_π (symétrie par rotation d'angle π autour d'un rayon vecteur dans le plan équatorial). C'est la symétrie de l'expérience VKS en contra-rotation exacte $F_1 = F_2$. Les deux termes restant, en $\cos(\theta)$ et $\cos(3\theta)$, ont la symétrie des objets astrophysiques : en se souvenant que α est un pseudo-scalaire, on peut vérifier que ces deux termes correspondent à un effet α invariant par symétrie par rapport au plan équatorial. Ces quatre dépendances angulaires sont représentées sur la figure 2.2.

A l'aide de ces 2 types de dépendances angulaires, on peut étudier des situations possédant une certaine symétrie (\mathcal{R}_π ou symétrie équatoriale), puis briser cette symétrie pour faire apparaître des régimes dynamiques de champ magnétique.

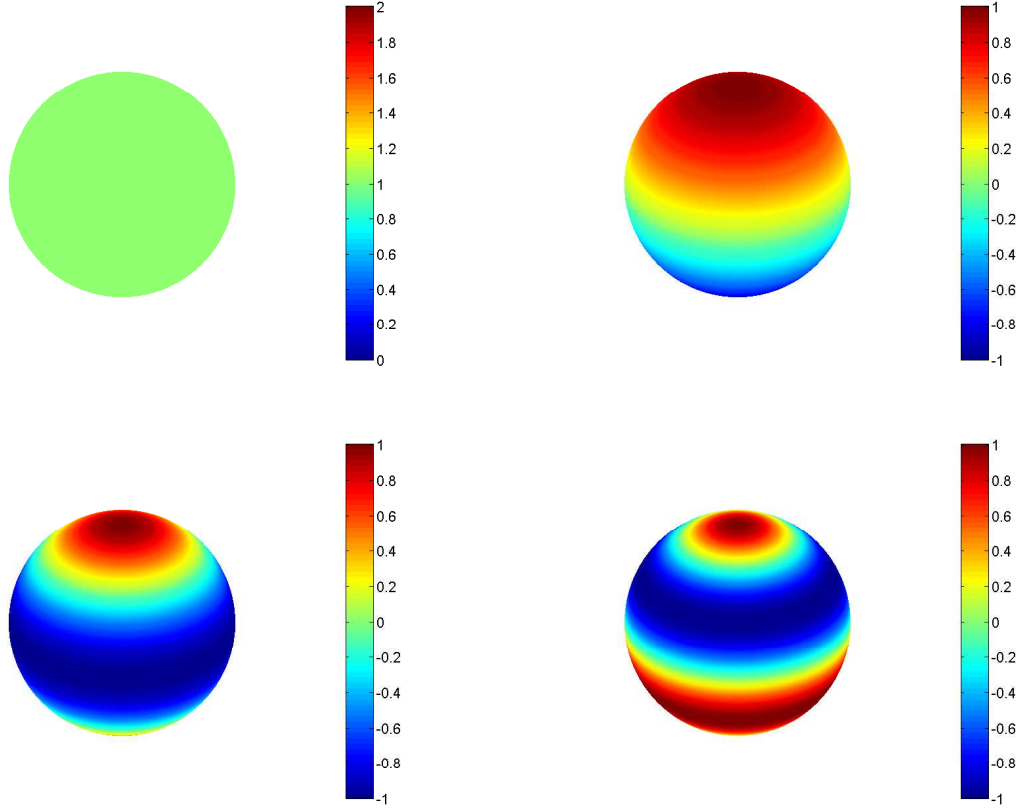


FIGURE 2.2 – Dépendances angulaires du forçage : de gauche à droite et de haut en bas : effet α uniforme, en $\cos(\theta)$, $\cos(2\theta)$, et $\cos(3\theta)$. On retrouve donc à gauche les forçages invariants par la transformation \mathcal{R}_π et à droite ceux qui sont invariants par symétrie équatoriale.

2.1.2 Forme du champ magnétique en dehors des nappes

On se concentre dans cette partie uniquement sur les modes axisymétriques, qui sont ceux observés à grande échelle aussi bien dans la dynamo VKS que dans la Terre ou dans le soleil. On cherche des modes propres de l'équation d'induction sous la forme $\vec{B} = (B_r(r, \theta), B_\theta(r, \theta), B_\phi(r, \theta))e^{pt}$. On utilisera également le potentiel vecteur $\vec{A} = (A_r(r, \theta), A_\theta(r, \theta), A_\phi(r, \theta))e^{pt}$. Dans le fluide, et en dehors des nappes d'effet α , le champ (B_r, B_θ, B_ϕ) est solution de l'équation de Helmholtz. En adimensionnant les longueurs par R_0 et le temps par R_0^2/η , cette équation s'écrit :

$$\tilde{p}\vec{B} = \Delta\vec{B} \quad (2.2)$$

avec $\tilde{p} = pR_0^2/\eta$.

Si on note $P_l^1(\cos(\theta))$ l'harmonique sphérique d'ordre l et \tilde{r} le rayon adimensionné, les solutions de ces équations pour B_ϕ et A_ϕ sont des combinaisons linéaires infinies de termes de la forme :

$$P_l^1(\cos(\theta))\frac{1}{\sqrt{\tilde{r}}}I_{l+1/2}\left(\sqrt{\tilde{p}}\tilde{r}\right) \text{ et } P_l^1(\cos(\theta))\frac{1}{\sqrt{\tilde{r}}}K_{l+1/2}\left(\sqrt{\tilde{p}}\tilde{r}\right), \quad l \in \mathcal{N}^* \quad (2.3)$$

où $I_{l+1/2}$ et $K_{l+1/2}$ sont les fonctions de Bessel modifiées d'ordre $l + 1/2$.

À l'extérieur de la sphère, le champ azimutal B_ϕ est nul, et le potentiel vecteur est solution de l'équation de Laplace $\Delta\vec{A} = \vec{0}$. A_ϕ est alors une combinaison linéaire infinie de termes de la

forme :

$$P_l^1(\cos(\theta)) \frac{1}{\tilde{r}^{l+1}}, \quad l \in \mathcal{N}^* \quad (2.4)$$

2.1.3 Conditions aux limites et relations de passage

Les conditions aux limites sur le champ magnétique sont les suivantes :

- La régularité des solutions en $\tilde{r} = 0$ impose les relations $B_\phi|_{\tilde{r}=0} = 0$ et $A_\phi|_{\tilde{r}=0} = 0$.
 - A la frontière conducteur-isolant ($\tilde{r} = 1$), le champ azimutal B_ϕ est continu et s'annule, tandis que le potentiel vecteur azimutal A_ϕ et sa dérivée $\partial_{\tilde{r}} A_\phi$ sont continus et se raccordent à la solution extérieure.
 - On impose à cette solution extérieure la condition supplémentaire $A_\phi \rightarrow 0$ quand $\tilde{r} \rightarrow \infty$.
- On définit maintenant les nombres de Reynolds magnétiques :

$$(Ra_1, Rb_1, Rc_1, Rd_1, Ra_2, Rb_2, Rc_2, Rd_2) = \frac{1}{\eta}(\tilde{a}_1, \tilde{b}_1, \tilde{c}_1, \tilde{d}_1, \tilde{a}_2, \tilde{b}_2, \tilde{c}_2, \tilde{d}_2) \quad (2.5)$$

(remarquez que quand l'effet α est localisé sur une nappe infiniment fine, les coefficients d'effet α ont la dimension d'une diffusivité et non plus d'une vitesse).

La présence d'effet α localisé sur des nappes infiniment fines se traduit par des relations de passage en $\tilde{r} = \chi$ et $\tilde{r} = \xi$, qui couplent les champs poloidal et toroidal. A la traversée de ces nappes, l'équation $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ assure la continuité de B_r , donc de A_ϕ . Comme le champ magnétique est borné, l'équation de Maxwell Faraday $-\partial_t \vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{E}$ assure la continuité du champ électrique tangentiel à la nappe \vec{E}_t . On utilise alors la loi d'Ohm $\vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{\alpha} \vec{B})$, où σ est la conductivité électrique du fluide, pour déduire la continuité des deux quantités :

$$-\frac{1}{\tilde{r}} \partial_{\tilde{r}}(\tilde{r} B_\phi) - R\alpha_{\theta\theta} B_\theta \quad (2.6)$$

$$\frac{1}{\tilde{r}} \partial_{\tilde{r}}(\tilde{r} B_\theta) - R\alpha_{\phi\phi} B_\phi \quad (2.7)$$

En intégrant la quantité 2.6 entre $\tilde{r} = \chi^-$ et $\tilde{r} = \chi^+$ on obtient que B_ϕ est continu en $\tilde{r} = \chi$. L'égalité de la quantité 2.6 de part et d'autre de la nappe assure alors la continuité de $\partial_{\tilde{r}} B_\phi$ en $\tilde{r} = \chi$. En intégrant la quantité 2.7 entre $\tilde{r} = \chi^-$ et $\tilde{r} = \chi^+$ on obtient la relation de passage :

$$0 = [B_\theta]_{\chi^-}^{\chi^+} - (Ra_1 + Rb_1 \cos(\theta) + Rc_1 \cos(2\theta) + Rd_1 \cos(3\theta)) B_\phi|_{\tilde{r}=\chi} \quad (2.8)$$

En intégrant la quantité 2.7 entre $\tilde{r} = \xi^-$ et $\tilde{r} = \xi^+$ on montre que B_θ est continu, donc que $\partial_{\tilde{r}} A_\phi$ est continu en $\tilde{r} = \xi$. L'égalité de la quantité 2.6 de part et d'autre de la nappe située en $\tilde{r} = \xi$ assure la continuité de $\partial_{\tilde{r}}(\tilde{r} B_\phi)$. Enfin, en intégrant la quantité 2.6 entre $\tilde{r} = \xi^-$ et $\tilde{r} = \xi^+$ on obtient la relation de passage :

$$0 = [B_\phi]_{\xi^-}^{\xi^+} + (Ra_2 + Rb_2 \cos(\theta) + Rc_2 \cos(2\theta) + Rd_2 \cos(3\theta)) B_\theta|_{\tilde{r}=\xi} \quad (2.9)$$

Pour une harmonique sphérique donnée, la dépendance radiale de A_ϕ et B_ϕ vérifie une équation différentielle ordinaire d'ordre 2 en \tilde{r} , et possède donc deux solutions linéairement indépendantes. Puisque A_ϕ et sa dérivée première sont continues en $\tilde{r} = \xi$, sa dépendance radiale est donc la même de part et d'autre de cette nappe. De même, la dépendance radiale de B_ϕ est la même de part et d'autre de la nappe $\tilde{r} = \chi$. On obtient finalement pour A_ϕ et B_ϕ les dépendances suivantes :

$$A_\phi = \begin{cases} \sum_{l=1}^{l=+\infty} P_l^1(\cos \theta) (-a_l) \frac{1}{\sqrt{\tilde{r}}} I_{l+1/2}(\sqrt{\tilde{p}\tilde{r}}) & , \text{ pour } \tilde{r} \leq \chi \\ \sum_{l=1}^{l=+\infty} P_l^1(\cos \theta) \frac{1}{\sqrt{\tilde{r}}} \left(-c_l I_{l+1/2}(\sqrt{\tilde{p}\tilde{r}}) - e_l K_{l+1/2}(\sqrt{\tilde{p}\tilde{r}}) \right) & , \text{ pour } \chi \leq \tilde{r} \leq 1 \\ \sum_{l=1}^{l=+\infty} P_l^1(\cos \theta) s_l \frac{1}{\tilde{r}^{l+1}} & , \text{ pour } \tilde{r} \geq 1 \end{cases} \quad (2.10)$$

$$B_\phi = \begin{cases} \sum_{l=1}^{l=+\infty} P_l^1(\cos \theta) b_l \frac{1}{\sqrt{r}} I_{l+1/2}(\sqrt{\tilde{p}} \tilde{r}) & , \text{ pour } \tilde{r} \leq \xi \\ \sum_{l=1}^{l=+\infty} P_l^1(\cos \theta) \frac{1}{\sqrt{\tilde{r}}} \left(d_l I_{l+1/2}(\sqrt{\tilde{p}} \tilde{r}) + f_l K_{l+1/2}(\sqrt{\tilde{p}} \tilde{r}) \right) & , \text{ pour } \xi \leq \tilde{r} \leq 1 \\ 0 & , \text{ pour } \tilde{r} \geq 1 \end{cases} \quad (2.11)$$

où a_l , b_l , c_l , d_l , e_l , f_l , et s_l sont des coefficients complexes. Les autres composantes du champ magnétique peuvent être calculées à partir des formules $B_r = \frac{1}{\tilde{r} \sin \theta} \partial_\theta (\sin(\theta) A_\phi)$ et $B_\theta = -\frac{1}{\tilde{r}} \partial_{\tilde{r}} (\tilde{r} A_\phi)$.

Si l'on tronque le système à l suffisamment grand, les relations de passage aux différentes frontières permettent d'obtenir un système linéaire d'équations sans second membre couplant les différents coefficients devant chacune des harmoniques sphériques de A_ϕ et B_ϕ . Pour qu'il existe une solution non triviale à ce système de Cramer, il faut donc que son déterminant soit nul. Cette condition conduit à la relation de dispersion du système, c'est-à-dire à une équation implicite sur \tilde{p} . La détermination des valeurs de \tilde{p} qui vérifient cette relation de dispersion achève le calcul de dynamo cinématique. Le calcul détaillé de la relation de dispersion est fourni en appendice.

2.2 Régimes dynamiques observés en astrophysique

La dynamique de deux modes de champ magnétique couplés est décrite dans le cadre de la théorie des systèmes dynamiques de basse dimensionalité au chapitre précédent. L'idée principale est la suivante : deux modes qui se transforment différemment sous l'action d'une symétrie donnée ne sont pas couplés à l'ordre linéaire. Lorsque l'on brise la symétrie considérée, les deux modes se couplent et peuvent présenter tous les régimes dynamiques observables dans un système dynamique de dimension 2 : dynamos stationnaires, oscillantes, bistables...

On considère dans un premier temps la symétrie d'un objet astrophysique : on autorise donc uniquement des dépendances de l'effet α en $\cos(\theta)$ et $\cos(3\theta)$ (c'est-à-dire $Ra_1 = Ra_2 = Rc_1 = Rc_2 = 0$). On calcule grâce à la relation de dispersion les taux de croissance des premiers modes instables (dipôle et quadrupôle). On brise alors la symétrie équatoriale en ajoutant une perturbation qui possède des composantes d'effet α indépendantes de θ , et/ou structurées en $\cos(2\theta)$. Les valeurs propres sont modifiées par l'ajout de cette perturbation qui couple dipôle et quadrupôle, et les modes propres deviennent un mélange de dipôle et de quadrupôle.

2.2.1 Renversements du champ magnétique terrestre

Situation symétrique : modes dipolaire et quadrupolaire

Si l'on prend les valeurs des paramètres $\chi = 0.55, \xi = 0.9, Rb_1 = 20, Rb_2 = 20, Rd_1 = 0, Rd_2 = 25$, les taux de croissance du dipôle et du quadrupôle sont très proches et valent respectivement $\tilde{p} = 1.2595$ et $\tilde{p} = 1.2108$. On représente figure 2.3 les isovaleurs du champ toroidal, et les lignes de champ poloidal. On peut vérifier visuellement que le mode dipolaire est transformé en son opposé quand on lui applique une symétrie par rapport au plan équatorial, tandis que le mode quadrupolaire est inchangé par cette symétrie.

Remarque : pourquoi faire simple quand on peut faire compliqué ?

La représentation des isovaleurs du champ toroidal et des lignes tangentes au champ poloidal permet de saisir au premier coup d'oeil la structure des modes de champ magnétique. On obtient deux réseaux de courbes fermées, planes, et qui ne peuvent pas se croiser. Une autre représentation du champ magnétique, souvent utilisée à l'issue d'une simulation numérique,

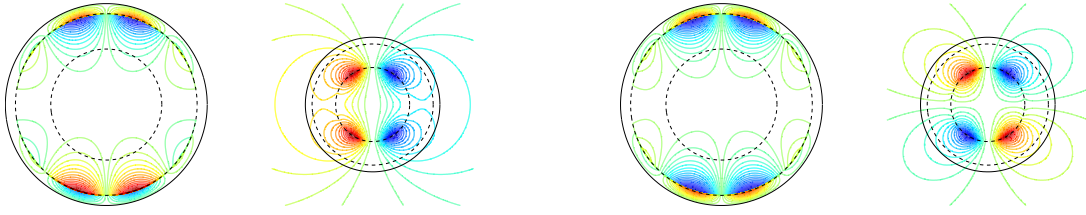


FIGURE 2.3 – Dipôle et quadrupôle de champ magnétique pour un effet α ayant la symétrie équatoriale. Les taux de croissance des deux modes sont très proches, le dipôle est légèrement plus instable. De gauche à droite : isovaleurs du champ toroidal et lignes de champ poloidal du mode dipolaire, isovaleurs du champ toroidal et lignes de champ poloidal du mode quadrupolaire).

consiste à représenter les lignes de champ à trois dimensions. Une ligne de champ est alors une courbe paramétrée $(X(\tau), Y(\tau), Z(\tau))$ dont l'équation est :

$$d_\tau(X) = B_x(X, Y, Z) \quad (2.12)$$

$$d_\tau(Y) = B_y(X, Y, Z) \quad (2.13)$$

$$d_\tau(Z) = B_z(X, Y, Z) \quad (2.14)$$

Les lignes de champ des modes dipolaire et quadrupolaire sont représentées figure 2.4. Il est beaucoup plus difficile de saisir la géométrie du mode au premier coup d'oeil. Les lignes de champ magnétique semblent avoir des trajectoires erratiques, ce qui est parfois attribué à tort à la turbulence hydrodynamique de l'écoulement dynamo : dans le cas présent, le fluide est au repos dans la majeure partie de la sphère ! On représentera donc dans la suite de ce chapitre uniquement les isovaleurs du champ toroidal et les lignes de champ poloidal, qui permettent de discuter beaucoup plus simplement la physique du problème.

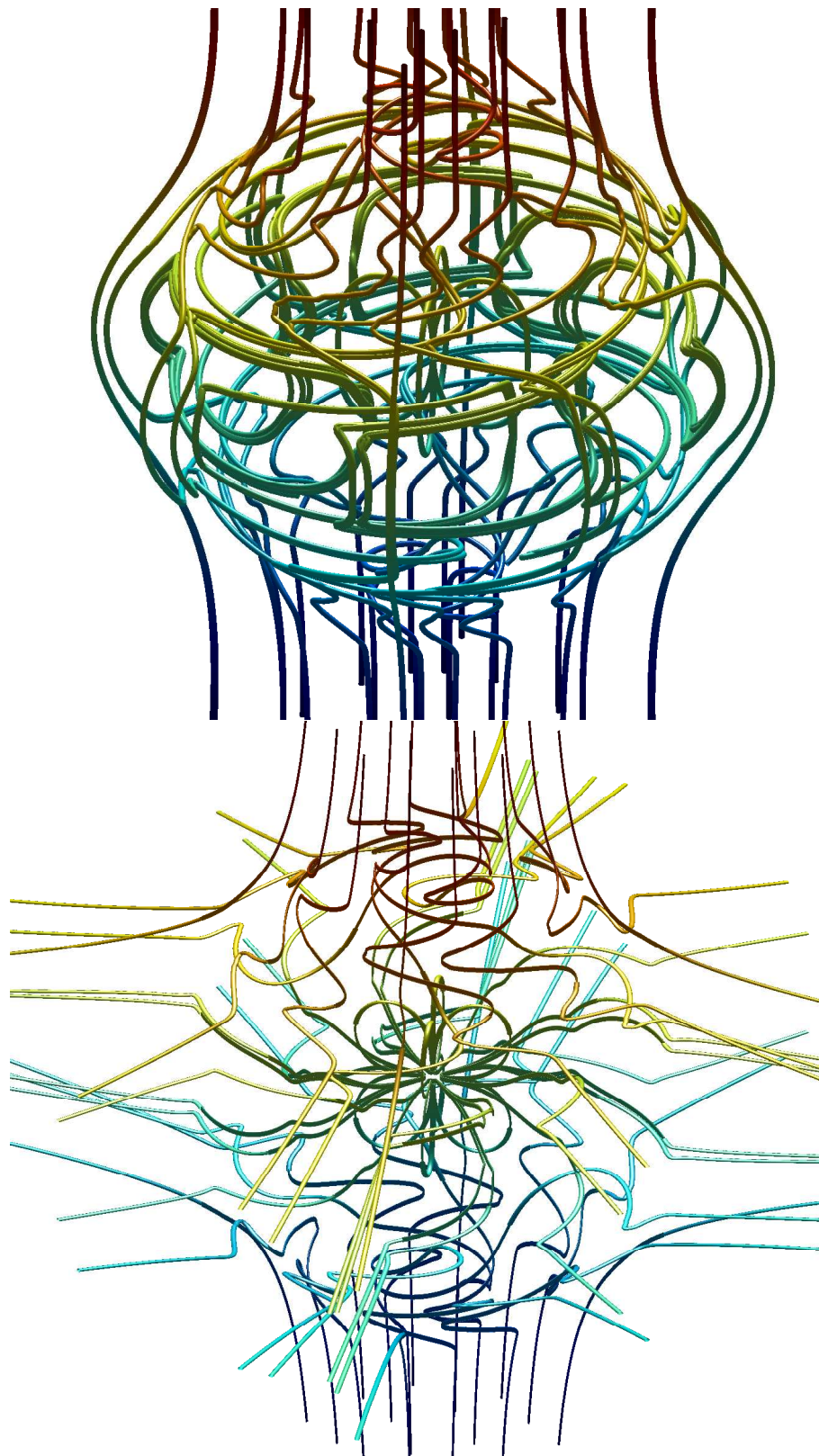


FIGURE 2.4 – Lignes de champ magnétique des premiers modes instables (haut : dipôle, bas : quadrupôle).

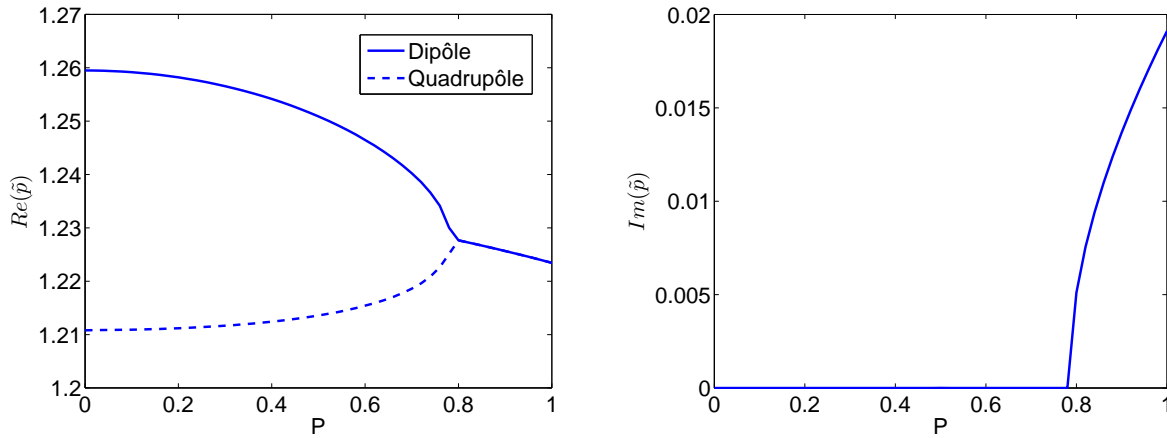


FIGURE 2.5 – Taux de croissance et pulsation des modes dipolaire et quadrupolaire en fonction de l’amplitude de la brisure de symétrie P .

Brisure de symétrie et renversements

On brise maintenant la symétrie en ajoutant la perturbation suivante : $Rc_1 = P$, $Rc_2 = -P$, où P mesure l’amplitude de la perturbation. L’évolution des valeurs de \tilde{p} pour les modes dipolaire et quadrupolaire est représentée en fonction de P sur la figure 2.5. On constate que les deux valeurs propres se rapprochent puis collisionnent pour une valeur critique de l’amplitude de la brisure de symétrie $P_c \simeq 0.78$. Au-delà de cette valeur le mode propre est oscillant, et les deux valeurs de \tilde{p} sont complexes conjuguées. Supposons la situation simple où les termes non-linéaires ont pour seul effet de saturer l’amplitude du mode qui croît par instabilité. Dans ce cas, la transition entre mode propre stationnaire et mode propre oscillant pour $P = P_c$ correspond à une bifurcation noeud-col dans le système dynamique complet : les points fixes collisionnent par paires pour former un cycle limite, selon le mécanisme décrit au chapitre précédent. Nous appellerons donc (abusivement) bifurcation noeud-col la transition ayant lieu en $P = P_c$, bien que l’analyse effectuée dans ce chapitre se limite aux termes linéaires.

La pulsation est nulle au seuil de la bifurcation noeud-col et croît en racine de l’écart au seuil. L’évolution de la structure du champ magnétique lors d’un renversement (c’est-à-dire lors d’une demi-période d’oscillation) est représentée figure 2.6 pour $P = 1$, soit $\tilde{p} = 1.2234 + 0.0191i$. On observe bien sur cette figure que le passage d’une polarité de champ magnétique à l’autre se fait en passant par une structure quadrupolaire. On remarque également que $P_c \ll Rb_1, Rb_2, Rd_2$, c’est-à-dire qu’il suffit de briser très peu la symétrie pour obtenir des renversements. Ceci est dû au fait que les taux de croissance du dipôle et du quadrupôle sont très proches dans la situation symétrique initiale.

Si la brisure de symétrie est telle que $P < P_c$ avec P proche de P_c , la prise en compte d’éventuelles fluctuations temporelles de l’écoulement peut induire des renversements aléatoires. Pour décrire précisément la dynamique temporelle de ces renversements il faudrait également connaître les termes non-linéaires de l’équation d’amplitude, et donc s’intéresser à la rétroaction du champ magnétique sur le champ de vitesse. Le présent calcul est limité à l’ordre linéaire et n’inclut pas ces effets.

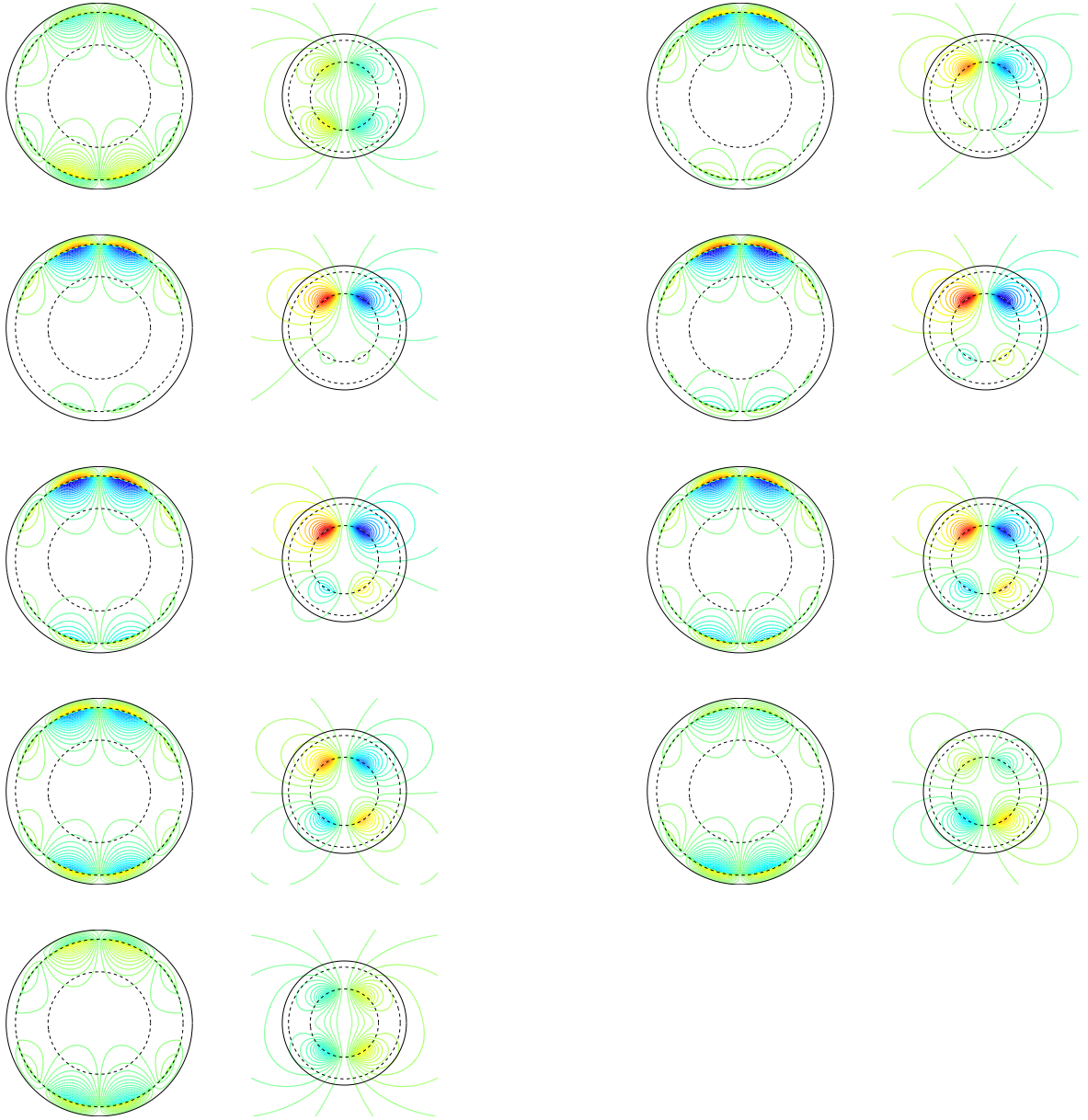


FIGURE 2.6 – Evolution de la structure du mode de champ magnétique lors d'un renversement (isovaleurs du champ toroidal et lignes de champ poloidal). Le champ va d'une polarité à la polarité opposée en passant par une structure quadrupolaire (de gauche à droite et de haut en bas : $t = 0$, $t = T/16$, $t = 2T/16$, $t = 3T/16$, ..., $t = T/2$, où T est la période de l'oscillation).

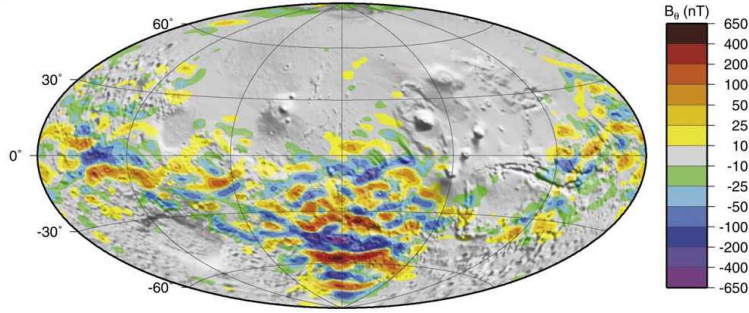


FIGURE 2.7 – Champ magnétique rémanent à la surface de la planète Mars. Ce champ est localisé essentiellement dans l’hémisphère Sud de la planète (figure issue de [19]).

2.2.2 Localisation du champ magnétique dans un hémisphère : la dynamo martienne

Brisure de symétrie et localisation du champ magnétique

Un autre problème intéressant dans le cadre de l’étude des dynamos astrophysiques est le suivant : selon les données issues de la mission Mars Global Surveyor, le champ magnétique rémanent de la planète Mars est localisé essentiellement dans l’hémisphère Sud de la planète [19]. Si la planète Mars n’est aujourd’hui plus une dynamo, elle en a vraisemblablement été une par le passé, et la géométrie du champ rémanent suggère que le champ dynamo était lui-même localisé dans l’hémisphère Sud de Mars. Comment un objet qui possède a priori la symétrie par rapport au plan équatorial peut-il avoir un champ magnétique dont la structure est tellement dissymétrique par rapport à ce plan ?

Nous allons montrer que ce type de structures de champ magnétique est obtenu naturellement dans les calculs cinématiques de dynamo α^2 sphériques. En effet si certaines perturbations qui brisent la symétrie équatoriale permettent d’obtenir des renversements du champ, d’autres entraînent une localisation du champ magnétique dans un seul des deux hémisphères.

Reprenons par exemple la situation de symétrie équatoriale étudiée précédemment ($\chi = 0.55, \xi = 0.9, Rb_1 = 20, Rb_2 = 20, Rd_1 = 0, Rd_2 = 25$, les autres coefficients d’effet α étant nuls). Si l’on brise la symétrie de cette situation en ajoutant une perturbation $Ra_1 = -P, Ra_2 = -P$, les taux de croissance des deux modes s’éloignent. On représente figure 2.8 la valeur propre issue du mode dipolaire (notée \tilde{p}_+) et celle issue du mode quadrupolaire (notée \tilde{p}_-). Le mode le plus instable est représenté en bas de la figure 2.8 pour $P = 0.2$ ($\tilde{p}_+ = 1.7759$). On constate que le champ magnétique est localisé essentiellement dans l’hémisphère Sud. Le mode associé à \tilde{p}_- correspond quant à lui à un champ magnétique localisé dans l’hémisphère Nord. Pour quantifier plus précisément la localisation du champ dans un hémisphère, on définit le paramètre f_{HN} par :

$$f_{HN} = \frac{\int_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} ||\vec{B}|_{\tilde{r}=1,\theta}||^2 \sin(\theta) d\theta}{\int_{\theta=0}^{\theta=\pi} ||\vec{B}|_{\tilde{r}=1,\theta}||^2 \sin(\theta) d\theta} \quad (2.15)$$

Cette quantité représente la fraction de l’énergie magnétique à la surface de la sphère qui se trouve dans l’hémisphère Nord. Elle vaut 0.5 pour un mode également intense dans les deux hémisphères, 0 pour un mode où le champ en surface est non nul seulement dans l’hémisphère Sud, et 1 pour un mode où le champ en surface est non nul seulement dans l’hémisphère Nord.

En utilisant l'expression du champ à la surface de la sphère :

$$B_r|_{\tilde{r}=1} = \sum_{l=1}^{l=+\infty} P_l^0(\cos \theta) s_l \frac{l(l+1)}{\tilde{r}^{l+2}} \quad (2.16)$$

$$B_\theta|_{\tilde{r}=1} = \sum_{l=1}^{l=+\infty} P_l^1(\cos \theta) s_l \frac{l}{\tilde{r}^{l+2}} \quad (2.17)$$

$$B_\phi|_{\tilde{r}=1} = 0 \quad (2.18)$$

On peut déduire l'expression de f_{HN} :

$$f_{HN} = \frac{\sum_{l=1}^{l=+\infty} \sum_{k=1}^{k=+\infty} Re(s_l) Re(s_k) [l(l+1)k(k+1) \mathcal{P}_{lk}^0 + lk \mathcal{P}_{lk}^1]}{\sum_{l=1}^{l=+\infty} Re(s_l)^2 2l^2(l+1)} \quad (2.19)$$

où $\mathcal{P}_{lk}^m = \int_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} P_l^m(\cos \theta) P_k^m(\cos \theta) \sin(\theta) d\theta$.

f_{HN} est représenté en fonction de l'amplitude de la brisure de symétrie P sur la figure 2.8, pour les modes propres correspondant aux deux valeurs propres \tilde{p}_+ et \tilde{p}_- . On constate que cette quantité s'écarte très rapidement de 0.5 quand on brise la symétrie : pour $P = 0.05$, 95% de l'énergie magnétique en surface est localisée dans un seul hémisphère ! Il est frappant de constater à quel point une très faible brisure de symétrie a changé de manière drastique la structure des modes instables. Encore une fois, ceci vient du fait que les deux modes considérés (dipôle et quadrupôle) ont des taux de croissance très proches dans la situation symétrique.

Interprétation en termes de système dynamique

On considère encore une fois que la dynamique du champ magnétique est régie par l'interaction de deux modes de champ magnétique, l'un dipolaire, noté \vec{D} , et l'autre quadrupolaire, noté \vec{Q} . On écrit donc $\vec{B} = d(t)\vec{D} + q(t)\vec{Q}$. Le système dynamique qui régit l'évolution des amplitudes d et q des modes dipolaire et quadrupolaire s'écrit à l'ordre linéaire :

$$\dot{A} = (\mu_r + i\mu_i)A + (\nu_r + i\nu_i)\bar{A} \quad (2.20)$$

avec $(\mu_r, \mu_i, \nu_r, \nu_i) \in \mathcal{R}^4$, et $A(t) = d(t) + iq(t)$. Si l'on pose $A = R(t)e^{i\theta(t)}$, l'équation pour la phase s'écrit :

$$\dot{\theta} = \mu_i - \nu_r \sin(2\theta) + \nu_i \cos(2\theta) \quad (2.21)$$

Nous avons vu que dans la situation symétrique, les coefficients μ_i et ν_i sont nuls. Lorsque l'on brise la symétrie, il y a deux situations limites : la première est celle où ν_i reste à peu près nul, et où μ_i augmente. Cette situation a été décrite au chapitre précédent, et correspond au passage d'une dynamo stationnaire à une dynamo oscillante par bifurcation noeud-col. La deuxième situation limite est celle où ν_i augmente tandis que μ_i reste à peu près nul : on passe alors de la situation $\nu_i = \mu_i = 0$, pour laquelle les modes stationnaires sont le dipôle et le quadrupôle ($\theta = 0$ où $\theta = \pi/2$ dans l'équation 2.21), à la situation $\nu_i \gg \nu_r$ où les modes stationnaires sont donnés par l'égalité :

$$0 = -\nu_r \sin(2\theta) + \nu_i \cos(2\theta) \simeq \nu_i \cos(2\theta) \quad (2.22)$$

Les solutions sont alors $\theta = \pm\pi/4[\pi/2]$, ce qui signifie $d(t) = \pm q(t)$: la structure spatiale des modes propres s'obtient en prenant la somme et la différence des modes propres initiaux (c'est-à-dire $\vec{D} + \vec{Q}$ et $\vec{D} - \vec{Q}$). Si on se réfère à la figure 2.8, on constate que la somme des modes dipolaire et quadrupolaire engendre un mode localisé essentiellement dans l'hémisphère Nord, tandis que la différence de ces deux modes correspond à un champ magnétique localisé dans l'hémisphère Sud.

La condition $\nu_i \gg \nu_r$ signifie que l'amplitude de la brisure de symétrie doit être grande devant

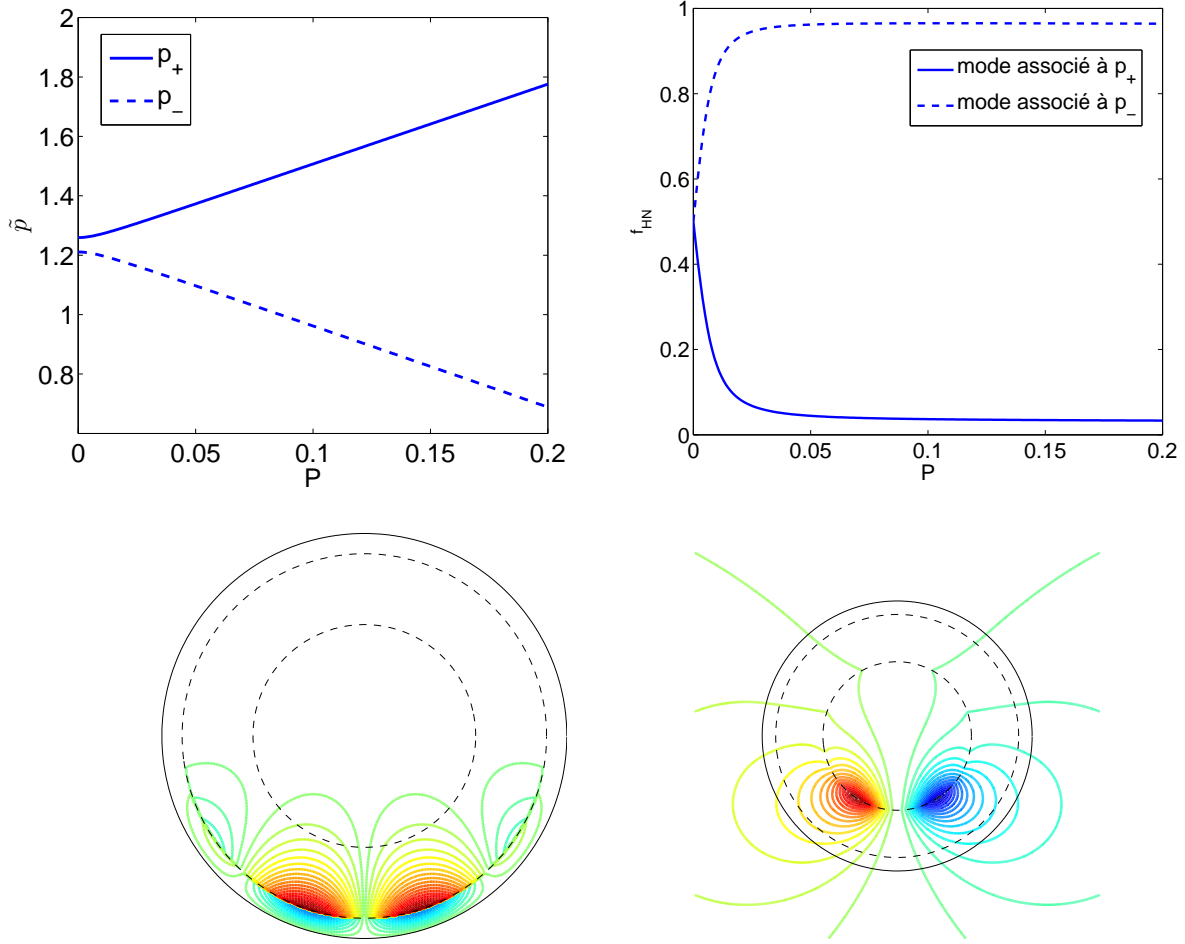


FIGURE 2.8 – Localisation du champ magnétique sous l'effet d'une brisure de symétrie : les modes dipolaire et quadrupolaire se couplent pour engendrer des modes de champ magnétique localisés dans un seul des deux hémisphères. En haut à gauche : évolution des valeurs propres issues du dipôle et du quadrupôle en fonction de l'amplitude P de la brisure de symétrie. En haut à droite : fraction de l'énergie magnétique en surface contenue dans l'hémisphère Nord pour chacun des deux modes propres. En bas : mode associé à p_+ représenté pour $P = 0.2$. L'intensité de l'effet α qui brise la symétrie équatoriale est alors de l'ordre de 1% de l'intensité de l'effet α qui respecte cette symétrie.

l'écart entre les taux de croissance des deux modes initiaux. Pour peu que les deux modes aient des taux de croissance très proches dans la situation symétrique, il suffira d'une très faible brisure de symétrie pour localiser entièrement le champ magnétique dans un seul des deux hémisphères. Ceci est une explication possible du fait que le champ magnétique de Mars soit localisé dans un hémisphère, sans pour autant que l'on note une forte dissymétrie des caractéristiques surfaciques de la planète : le mécanisme qui engendre le champ magnétique n'a pas besoin d'être beaucoup plus fort dans un hémisphère que dans l'autre pour qu'il y ait localisation du champ magnétique. De tels champs magnétiques localisés ont également été observés dans des simulations numériques de dynamo convectives. Dans ces simulations numériques, la brisure de symétrie peut être temporaire et due à des fluctuations turbulentes [20], ou permanente et engendrée par une instabilité secondaire de l'écoulement de base [21].

Localisation hémisphérique du champ magnétique entre les renversements

Dans le cadre du modèle à deux modes, on distinguera donc deux types de brisures de symétrie :

- Celles qui font croître μ_i plus rapidement que ν_i : ces brisures de symétries engendrent des renversements du champ magnétique, c'est-à-dire le passage d'un champ stationnaire à un champ oscillant par bifurcation noeud-col.
- Celles qui font croître ν_i plus rapidement que μ_i : ces brisures de symétries engendrent une localisation du champ magnétique dans un seul des deux hémisphères.

Pour ces deux cas limite, une résolution graphique de l'équation 2.21 est proposée sur la figure 2.9 : dans le premier cas, les solutions stationnaires sont données par l'intersection de la courbe $\nu_r \sin(2\theta)$ avec la droite horizontale $y = \mu_i$. si $|\mu_i|$ dépasse $|\nu_r|$, il n'y a plus d'intersection et la solution est oscillante. Dans le second cas, $\nu_r \sin(2\theta)$ doit intersecter $\nu_i \cos(2\theta)$, et pour $|\nu_i| \gg |\nu_r|$ cette intersection a lieu en $\theta = \pi/4$ modulo $\pi/2$. On constate que même dans le cas limite où μ_i augmente beaucoup plus vite que ν_i (premier cas), une faible brisure de symétrie entraîne une localisation du champ, qui devient ensuite oscillant si l'on brise plus encore la symétrie. En effet, la bifurcation noeud-col a lieu au voisinage de $\theta = \pm\pi/4$ (modulo π), le signe étant déterminé par les signes relatifs de μ_i et ν_r . Dans le plus simple des scénarios, un champ qui se renverse est donc localisé d'un seul côté de l'objet considéré pendant les longues phases de polarité constante.

On peut remarquer que cette situation est extrêmement similaire à l'étude d'un système de deux oscillateurs couplés telle qu'elle apparaît dans le livre "Dynamique générale des vibrations" de Y. Rocard. Dans cette étude, l'auteur distingue deux types de couplages entre les deux modes d'oscillation :

- Le couplage **symétrique** de deux modes d'oscillation éloigne les pulsations propres de ces deux modes.
- Le couplage **antisymétrique** de deux modes d'oscillation rapproche les pulsations propres de ces deux modes. Si le couplage est suffisamment intense, les deux pulsations peuvent collisionner : elles acquièrent alors une partie imaginaire et il apparaît une **instabilité par confusion de fréquences propres**.

Réécrivons le système d'équations vérifié par $d(t)$ et $q(t)$ à partir de l'équation 2.20 :

$$\dot{d} = (\mu_r + \nu_r)d + (\nu_i - \mu_i)q \quad (2.23)$$

$$\dot{q} = (\mu_r - \nu_r)q + (\nu_i + \mu_i)d \quad (2.24)$$

C'est le même système d'équation que celui qui régit la dynamique deux oscillateurs couplés, à ce détail près que les dérivées secondes sont remplacées par des dérivées premières en temps. On

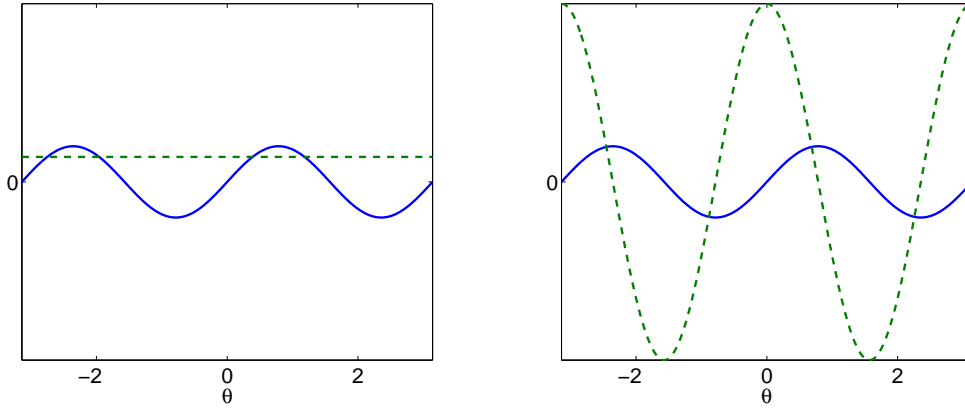


FIGURE 2.9 – Résolution numérique de l'équation sur la phase. A gauche, μ_i croît et $\nu_i = 0$. On obtient des renversements par bifurcation noeud-col quand il n'y a plus de point d'intersection entre les deux courbes. A droite, ν_i croît plus vite que μ_i , et les solutions stationnaires sont des dynamos localisées ($\theta \simeq \pi/4$ modulo $\pi/2$).

passé donc d'un problème à l'autre en remplaçant l'expression "pulsation propre" par l'expression "taux de croissance". Ainsi, on distinguera également dans ce système les mêmes deux types de couplages :

- Le couplage **symétrique** des deux modes d'instabilité est réglé par le coefficient ν_i . Ce couplage éloigne les taux de croissance des deux modes.
- Le couplage **antisymétrique** des deux modes d'instabilité est réglé par le coefficient μ_i . Il rapproche les taux de croissance des deux modes d'oscillation. Si le couplage est suffisamment intense, ces deux taux de croissance peuvent collisionner : ils acquièrent alors une partie imaginaire et il apparaît une **oscillation par confusion de taux de croissance**.

2.2.3 Oscillation entre deux modes de même symétrie : la dynamo solaire

Situation symétrique par rapport au plan équatorial

La dynamo solaire est une dynamo oscillante de période 22 ans. Le champ magnétique à grande échelle a la symétrie dipolaire, bien qu'il soit plus structuré qu'un simple dipôle. A ce champ à grande échelle se superposent des zones de fort champ magnétique, visibles à la surface du soleil sous la forme de "taches solaires". La formation de ces taches solaires peut être résumée de la manière suivante : considérons un tube de champ magnétique toroidal. Si l'intensité du champ dans ce tube est grande, ce dernier monte vers la surface par "flottaison magnétique". Il forme une boucle qui perce la surface en deux points où se forment deux taches solaires. Les taches solaires apparaissent donc dans les régions de fort champ toroidal. On souhaite retrouver la phénoménologie de dynamo oscillante de symétrie dipolaire dans le modèle de dynamo α^2 sphérique.

On considère la situation symétrique par rapport au plan équatorial où $\chi = 0.45$, $\xi = 0.9$, $Rb_1 = R$, $Rb_2 = -R$, $Rd_2 = -0.4R$, qui produit une dynamo oscillante par bifurcation de Hopf pour $R > R_c = 219$. La pulsation au seuil est $Im(\tilde{p}) = 57.5$. L'évolution de la structure du champ magnétique est représentée figure 2.10 sur une demie période (on a choisi pour

cette représentation $R = 250$, valeur pour laquelle $\tilde{p} = 5.40 + 61.1i$). Dans cette situation symétrique par rapport au plan équatorial, les modes de symétrie dipolaire et quadrupolaire sont découplés les uns des autres : l'oscillation s'obtient donc par couplage entre différentes harmoniques sphériques de même symétrie, par exemple un dipôle et un octupôle de champ magnétique. La migration vers l'équateur des zones de champ poloidal fort, observée sur la figure 2.10, correspond à cette oscillation entre dipôle et octupôle. On remarque que le champ toroidal comporte lui des harmoniques d'ordres plus élevés encore.

Brisure de symétrie et dynamos oscillantes localisées

Comme dans le cas des dynamos stationnaires, il existe pour les valeurs des paramètres considérées ici un mode quadrupolaire, oscillant, dont le taux de croissance est très légèrement inférieur à celui du dipôle. Les pulsations des modes dipolaire et quadrupolaire sont proches : pour $R = 250$, la valeur propre associée au mode dipolaire est $\tilde{p} = 5.40 + 61.14i$ et celle associée au mode quadrupolaire est $\tilde{p} = 5.20 + 60.06i$.

Si l'on brise la symétrie équatoriale, les modes oscillants de symétrie dipolaire et quadrupolaire vont se coupler suivant les équations :

$$\dot{d} = p_d d + \alpha q \quad (2.25)$$

$$\dot{q} = p_q q + \beta d \quad (2.26)$$

où $d(t)$ et $q(t)$ sont les amplitudes (complexes) des modes dipolaire et quadrupolaire, p_d et p_q sont les taux de croissance complexes de ces deux modes propres dans la situation de symétrie équatoriale, et α et β sont les deux coefficients de couplage : ils sont complexes, proportionnels à l'amplitude de la brisure de symétrie, et tous les deux du même ordre de grandeur. Si l'on cherche des modes propres de ce système d'équation en e^{pt} , on obtient 2 valeurs acceptables pour p :

$$p_{\pm} = \frac{1}{2}(p_d + p_q) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(p_d - p_q)^2 + 4\alpha\beta} \quad (2.27)$$

Dans le cas où l'amplitude de la brisure de symétrie est grande devant l'écart entre les deux valeurs propres dans la situation symétrique, c'est-à-dire dans le cas $\alpha\beta \gg (p_d - p_q)^2$, on obtient les valeurs approchées suivantes :

$$p_{\pm} \simeq \frac{1}{2}(p_d + p_q) \pm \sqrt{\alpha\beta} \quad (2.28)$$

En remplaçant dans l'équation 2.25, on obtient $d \simeq \pm \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}q$, soit $|d| \sim |q|$: la dynamo oscillante peut ainsi être localisée dans un seul hémisphère sous l'effet d'une brisure de symétrie. A titre d'exemple, on représente sur la figure 2.11 le mode propre associé à $p_+ = 9.36 + 61.50i$ lorsque l'on prend les valeurs des paramètres $R = 250$ et que l'on brise la symétrie à l'aide de la perturbation $P = -Ra_1 = Ra_2 = Rc_1 = Rc_2 = 10$.

Selon les données collectées pendant le minimum de Maunder entre 1645 et 1715, les taches solaires étaient beaucoup moins présentes pendant cette période, et de plus elles étaient localisées essentiellement dans l'hémisphère Sud du soleil [7]. Le calcul précédent montre comment une très faible brisure de symétrie de l'écoulement peut conduire à une localisation du champ magnétique oscillant dans un seul hémisphère.

Le satellite SOHO, lancé en 1995, fournit des données en continue sur l'activité magnétique du soleil. L'appareil Michelson Doppler Interferometer (MDI) mesure le champ magnétique par

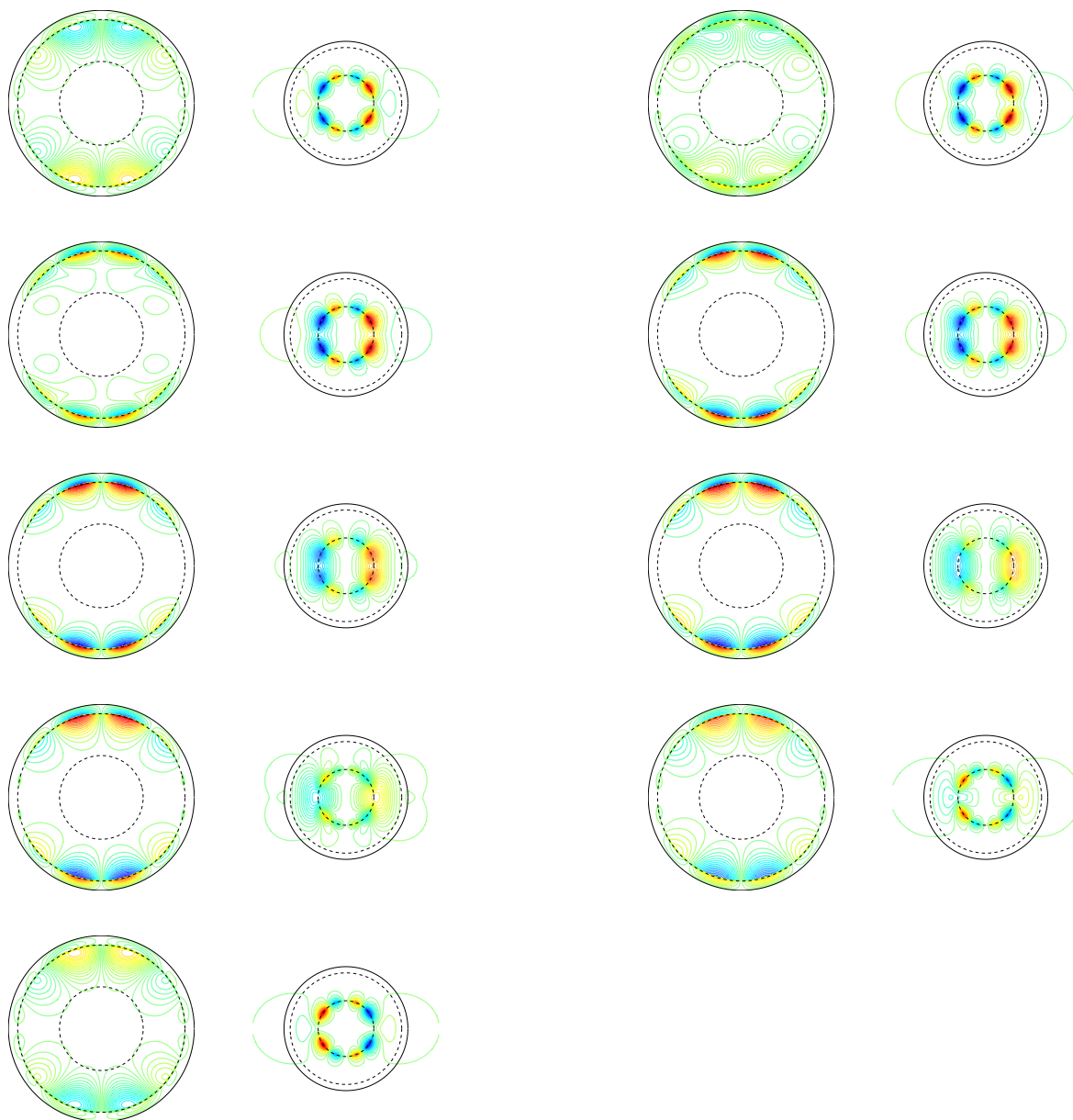


FIGURE 2.10 – Oscillation du champ magnétique solaire pour $R = 250$: les isovaleurs du champ toroidal et les lignes de champ poloidal sont représentées tous les seizièmes de période pendant une demie période (de gauche à droite et de haut en bas). On distingue bien le mouvement des zones de champ fort depuis les pôles jusqu'à l'équateur.

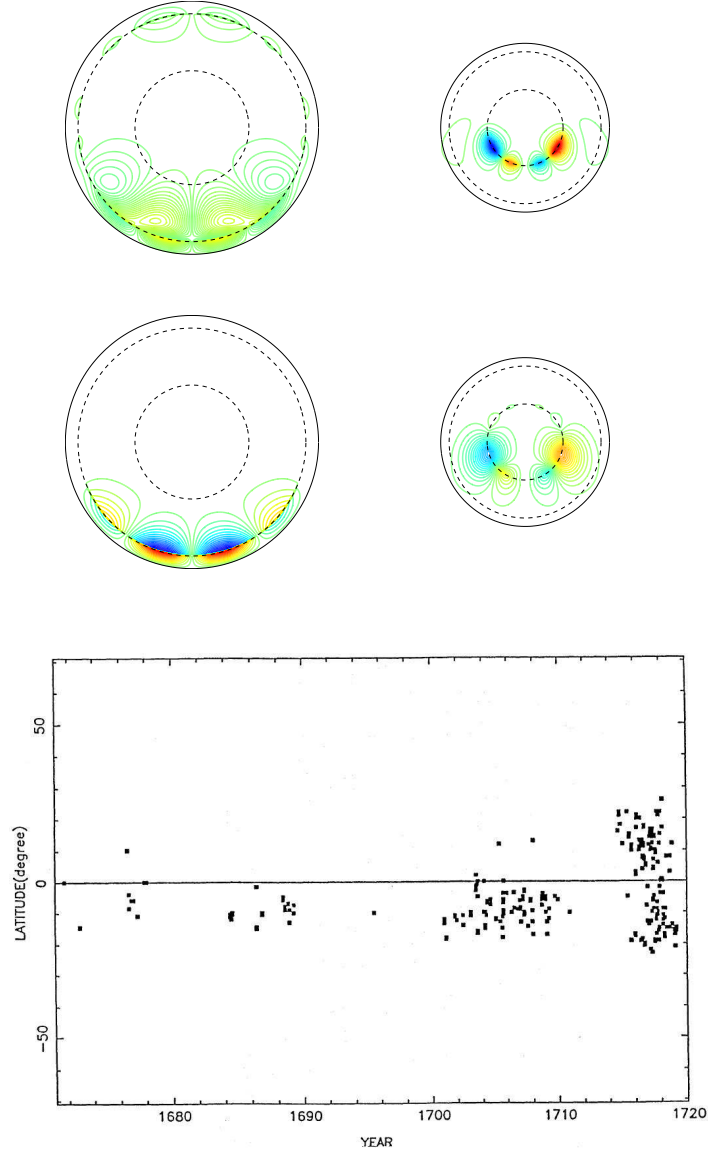


FIGURE 2.11 – Champ oscillant localisé dans l’hémisphère Sud : à partir de la situation symétrique correspondant à $R = 250$, on brise la symétrie à l’aide de la perturbation $P = 10$. On représente alors le mode correspondant à $p_+ = 9.36 + 61.50i$. En haut : partie réelle du mode. Au milieu : partie imaginaire du mode. En bas : diagramme papillon des taches solaires durant le minimum de Maunder (d’après Ribes et Nesme-Ribes). On y voit nettement la localisation du champ dans un seul hémisphère, puis le retour à la situation symétrique.

effet Zeeman et fournit une cartographie des taches solaires depuis 1997 environ. Une telle cartographie de la surface du soleil est représentée sur la figure 2.12. A l'aide d'un seuillage, on peut extraire de ces cartes la surface du soleil occupée par les taches solaires. La valeur précise du seuil importe peu, car les taches ont un très fort contraste. Le traitement obtenu est donc robuste. J'ai extrait de ces cartes la surface des hémisphères Nord et Sud occupée par les taches solaires. Les quantités obtenues sont appelées respectivement M_{Nord} et M_{Sud} . Sur la figure 2.12 sont représentées les séries temporelles obtenues, après un lissage sur 10 rotations solaires, ainsi que la fraction relative de taches solaires dans l'hémisphère Nord $M_{Nord}/(M_{Nord} + M_{Sud})$. Les données disponibles couvrent environ une demi-période du champ magnétique solaire, soit 1 cycle solaire. On constate que durant la majeure partie du cycle solaire la répartition des taches est à peu près symétrique par rapport à l'équateur. A l'approche du minimum d'activité, les taches se localisent essentiellement dans l'hémisphère Sud, suite à quoi il n'y en a plus, et enfin elles réapparaissent dans l'hémisphère Nord.

On peut encore une fois expliquer simplement cette dynamique à l'aide du modèle précédent. On considère donc le calcul précédent, mais maintenant pour $P = 0.2$. Sur la figure 2.12 est représenté un diagramme papillon de B_ϕ évalué à $\tilde{r} = 0.95$ sur une demie période. On choisit cette composante car c'est celle qui est responsable de la présence des taches solaires [22]. On représente également la fraction de l'énergie de B_ϕ présente dans l'hémisphère Nord, toujours pour $\tilde{r} = 0.95$. On constate sur le diagramme papillon que le champ magnétique est à peu près de même amplitude dans les deux hémisphères. Par contre, il est légèrement en avance dans l'hémisphère Nord. Ainsi, quand on approche le minimum d'activité, le champ s'éteint d'abord au Nord, ce qui conduit à une forte localisation dans l'hémisphère Sud. Il s'éteint ensuite également au Sud, pendant qu'il repousse dans l'hémisphère Nord. Ceci se voit nettement sur la série temporelle de la fraction d'énergie de B_ϕ dans l'hémisphère Nord, qui reproduit qualitativement la localisation observée pendant le dernier cycle solaire. Cette localisation serait donc due à une légère asymétrie Nord-Sud de l'écoulement au sein du soleil. Une telle asymétrie a par ailleurs été observée et quantifiée à la surface du soleil [23].

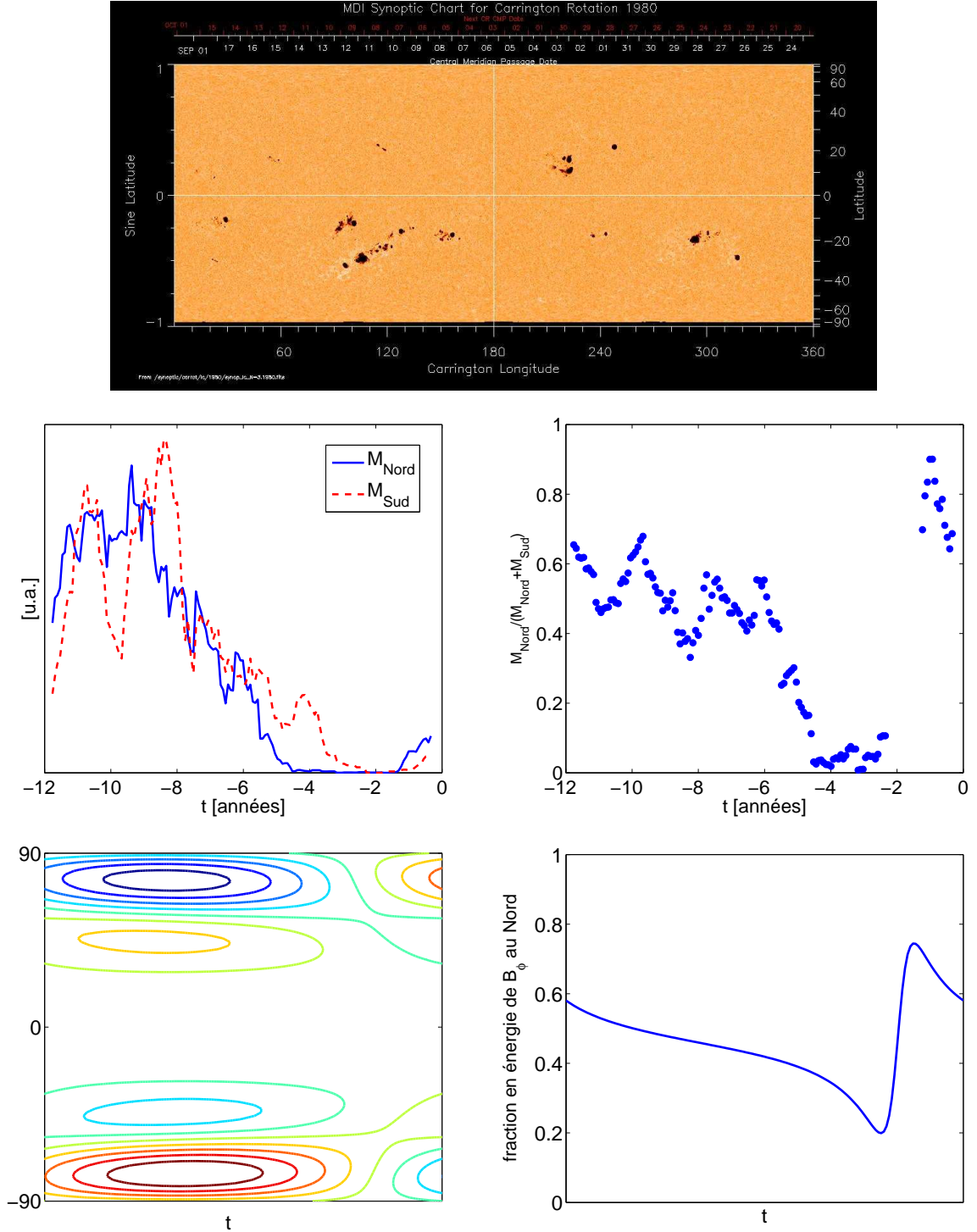


FIGURE 2.12 – En Haut : carte synoptique de la surface du soleil pendant une rotation, c’est-à-dire environ 27 jours. Les taches solaires se distinguent nettement. Milieu gauche : surface couverte par les taches solaires dans les hémisphères Nord et Sud du soleil (observations, lissées sur 10 rotations solaires). Milieu droit : fraction de taches localisées dans l’hémisphère Nord. Bas gauche : diagramme papillon de B_ϕ à $\tilde{r} = 0.95$, issu du modèle pour $P = 0.2$, et représenté sur une demie période. Bas droit : fraction de l’énergie de B_ϕ dans l’hémisphère Nord, à $\tilde{r} = 0.95$.

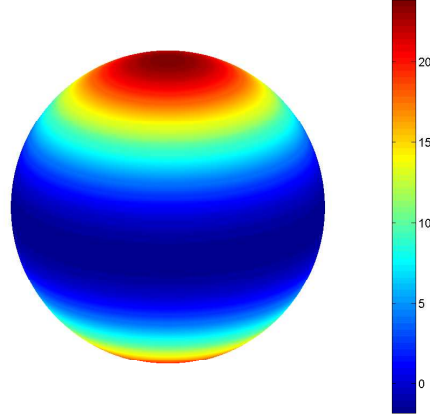


FIGURE 2.13 – Dépendance angulaire des coefficients d’effet α . Le forçage est localisé au voisinage des deux disques de l’expérience, c’est-à-dire ici au voisinage des deux pôles de la sphère, et l’hélicité de l’écoulement change de signe quand on se déplace depuis les pôles jusqu’à l’équateur.

2.3 Application à la dynamo VKS

Pour retrouver les régimes dynamiques de la dynamo VKS, on part d’une situation qui possède la symétrie \mathcal{R}_π , c’est-à-dire de l’effet α uniforme, et/ou structuré en $\cos(2\theta)$. Cette situation symétrique correspond au cas où les deux disques de l’expérience tournent en contra-rotation exacte ($F_1 = F_2$). Lorsque l’on fait tourner un disque plus vite que l’autre, on brise cette symétrie. Cette brisure de symétrie sera représentée dans le calcul α^2 par l’ajout d’une dépendance en $\cos(\theta)$ et en $\cos(3\theta)$ dans les coefficients d’effet α . On souhaite retrouver ainsi qualitativement la forme de l’espace des paramètres de l’expérience VKS, et en particulier la présence de ”poches d’oscillation” en régime décalé.

2.3.1 Cas symétrique

On prend comme valeurs des paramètres $\chi = 0.55$, $\xi = 0.9$, $Ra_1 = 11$, $Ra_2 = 11$, $Rc_1 = 12.83$, $Rc_2 = 12.83$ les autres coefficients d’effet α étant nuls. Dans cette situation les deux coefficients d’effet α sont positifs près des pôles de la sphère, et négatifs dans le plan équatorial. Cette dépendance angulaire est représentée figure 2.13. Dans l’expérience VKS, la rotation différentielle imposée par la contra-rotation des disques couplée à la recirculation poloidale engendrée par la force centrifuge produit une forte hélicité de l’écoulement. Comme l’écoulement radial est dirigé vers le bord de la cuve au voisinage des disques et vers le centre de la cuve dans le plan équatorial, cette hélicité change de signe quand on se déplace des disques vers le plan équatorial de la cuve. Ce changement de signe de l’hélicité est représenté dans le présent calcul par un changement de signe des coefficients $\alpha_{\theta\theta}$ et $\alpha_{\phi\phi}$ quand on descend en latitude depuis les pôles. Le dipôle et le quadrupôle sont alors instables et ont des taux de croissance très proches, respectivement $\tilde{p} = 9.99$ et $\tilde{p} = 9.67$. Ces deux modes sont représentés sur la figure 2.14. On observe bien que le quadrupôle est invariant par la symétrie \mathcal{R}_π , alors que le dipôle est changé en son opposé.

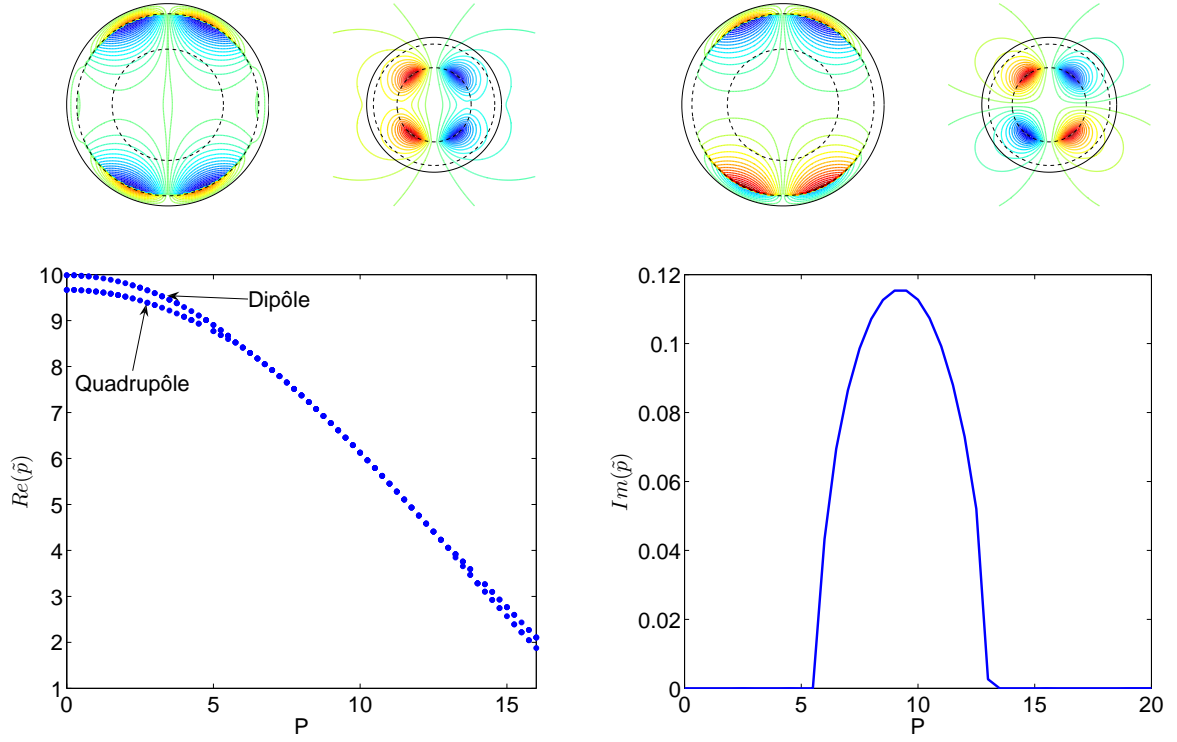


FIGURE 2.14 – En haut : Dipôle et quadrupôle de champ magnétique pour un effet α respectant la symétrie \mathcal{R}_π . En bas : taux de croissance et pulsation des modes dipolaire et quadrupolaire en fonction de l’amplitude P de la brisure de symétrie.

2.3.2 Brisure de symétrie : oscillation, et retour à la dynamo stationnaire

On pose maintenant $Rd_1 = -Rd_2 = P$, où P représente l’amplitude de la brisure de symétrie. L’évolution des valeurs propres du dipôle et du quadrupôle est tracée en fonction de P sur la figure 2.14. On constate que les taux de croissance des deux modes collisionnent et réalisent une bifurcation noeud-col pour $P_1 \simeq 6$: la dynamo devient oscillante, avec une fréquence nulle au seuil d’oscillation. Un peu avant cette bifurcation noeud-col, d’éventuelles fluctuations turbulentes de l’écoulement, qui ne sont pas prises en compte dans ce modèle, peuvent déclencher des renversements du champ magnétique. On constate de plus que, quand P atteint une deuxième valeur critique $P_2 \simeq 13$, il se produit une autre bifurcation noeud-col et le mode oscillant se scinde à nouveau en 2 branches stationnaires. On retrouve donc la phénoménologie dynamo stationnaire, oscillante, puis à nouveau stationnaire quand on s’éloigne de la symétrie.

2.3.3 Espace des phases de la dynamo VKS

Dans le but de reproduire l’espace des paramètres de la dynamo VKS, on prend les dépendances simples suivantes pour les coefficients du modèle :

- L’amplitude de l’effet α qui respecte la symétrie \mathcal{R}_π est proportionnelle à la somme des fréquences de rotation des deux disques : $Ra_1 = Ra_2 = (F_1 + F_2)/3$, $Rc_1 = Rc_2 = 0.39(F_1 + F_2)$.
- L’amplitude de la brisure de symétrie est proportionnelle à la différence des deux fréquences de rotation : $P = Rd_1 = -Rd_2 = F_1 - F_2$.

On a tracé sur la figure 2.15 les zones de dynamo stationnaire et oscillante prévues par ce modèle simple : il reproduit la présence de poches d'oscillation au voisinage de la contra-rotation exacte.

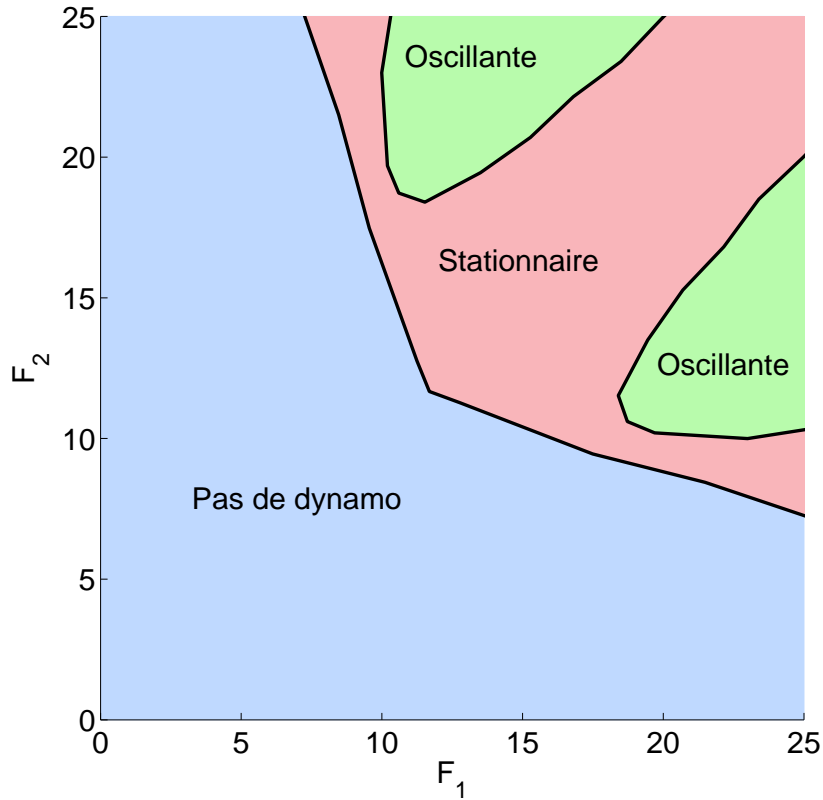


FIGURE 2.15 – Espace des paramètres obtenu à partir du modèle de dynamo α^2 sphérique. On retrouve la présence de poches d'oscillation, comme dans l'espace des paramètres obtenu expérimentalement. Bleu : pas de dynamo, rouge : dynamo stationnaire, vert : dynamo oscillante.

Les effets qui produisent le champ magnétique dans ce modèle de dynamo α^2 sont certainement très différents de ceux qui engendrent le champ magnétique dans l'expérience VKS. Cependant, les différents régimes dynamiques observés peuvent s'expliquer plus à l'aide d'arguments de symétrie que par des considérations fines sur les effets magnétohydrodynamiques impliqués. Ainsi, on retrouve toute la phénoménologie des régimes dynamiques de l'expérience VKS à l'aide de ce modèle, pourtant très minimaliste du point de vue hydrodynamique. Rappelons enfin que l'analyse effectuée dans ce chapitre se limite à l'ordre linéaire : on espère que les non-linéarités ont uniquement pour effet de saturer l'instabilité, si bien que les différents régimes dynamiques peuvent être prévus à l'aide de ce calcul linéaire. Nous avons vu cependant que dans l'expérience VKS les termes non-linéaires peuvent avoir un effet plus complexe qu'une simple saturation. Ils conduisent par exemple au phénomène de bistabilité entre dynamo stationnaire et oscillante étudié au chapitre précédent.

2.3.4 Localisation du champ magnétique dans l'expérience VKS

La dynamique de deux modes de champ magnétique couplés conduit à une localisation du champ magnétique. Afin de pousser plus avant la comparaison entre modèle et expérience, on souhaite donc mettre en évidence cette localisation du champ magnétique dans l'expérience VKS. Pour ce faire, on considère toutes les mesures de la campagne VKS2R effectuées avec F_1 et F_2 entre 18 et 24 Hz. L'ensemble des points de l'espace des paramètres considéré est représenté sur la figure 2.16. On calcule le champ magnétique moyen mesuré aux positions P1 et P2 (voir chapitre précédent), l'énergie magnétique de ce champ moyen, puis la fraction de l'énergie magnétique du côté du disque 1. Cette grandeur est représentée sur la figure 2.16 en fonction de $(F_1 - F_2)/(F_1 + F_2)$, qui est une grandeur sans dimension qui quantifie la brisure de symétrie imposée à l'écoulement (précisons tout de même que l'on obtient environ le même alignement des points si l'on porte seulement $F_1 - F_2$ en abscisse). On constate que l'énergie magnétique se localise très fortement d'un côté de la cuve dès que la symétrie \mathcal{R}_π est brisée. De plus, il est intéressant de constater que le champ se localise du côté du disque le plus lent, ce qui peut paraître contre-intuitif. Insistons enfin sur la faible brisure de symétrie nécessaire pour obtenir la localisation du champ magnétique : quand $F_1 - F_2$ vaut 15% de $F_1 + F_2$, plus de 90% de l'énergie magnétique est localisée d'un côté de la cuve.

Lors des mesures effectuées à $(18Hz, 24Hz)$ et $(24Hz, 18Hz)$, le champ magnétique se renverse aléatoirement, en restant très longtemps dans des phases de polarité donnée. Les séries temporelles des énergies magnétiques près de chacun des disques sont représentées sur la figure 2.17. On constate que lors d'une phase de polarité donnée, le champ est fortement localisé du côté du disque lent. Lors d'un renversement, il se localise brièvement de l'autre côté de la cuve, avant de repousser du côté du disque lent, avec la polarité opposée. Un autre manière de représenter ce phénomène consiste à porter le champ axial près d'un disque en fonction du champ axial près de l'autre disque. L'espace des phases ainsi obtenu est tracé sur la figure 2.17 : on constate que le champ passe beaucoup de temps près d'un point fixe, pour lequel le champ est localisé près du disque lent. Les fluctuations hydrodynamiques sont parfois suffisantes pour faire sortir le système de ce point fixe. Le système suit alors une orbite déterministe, et rejoint le point fixe de polarité opposée après une brève localisation du champ près du disque rapide.

La localisation du champ magnétique dans l'expérience VKS, ainsi que la structure de l'espace des phases reconstruit à partir des données expérimentales sont en accord avec le modèle de renversements à deux modes de champ magnétique.

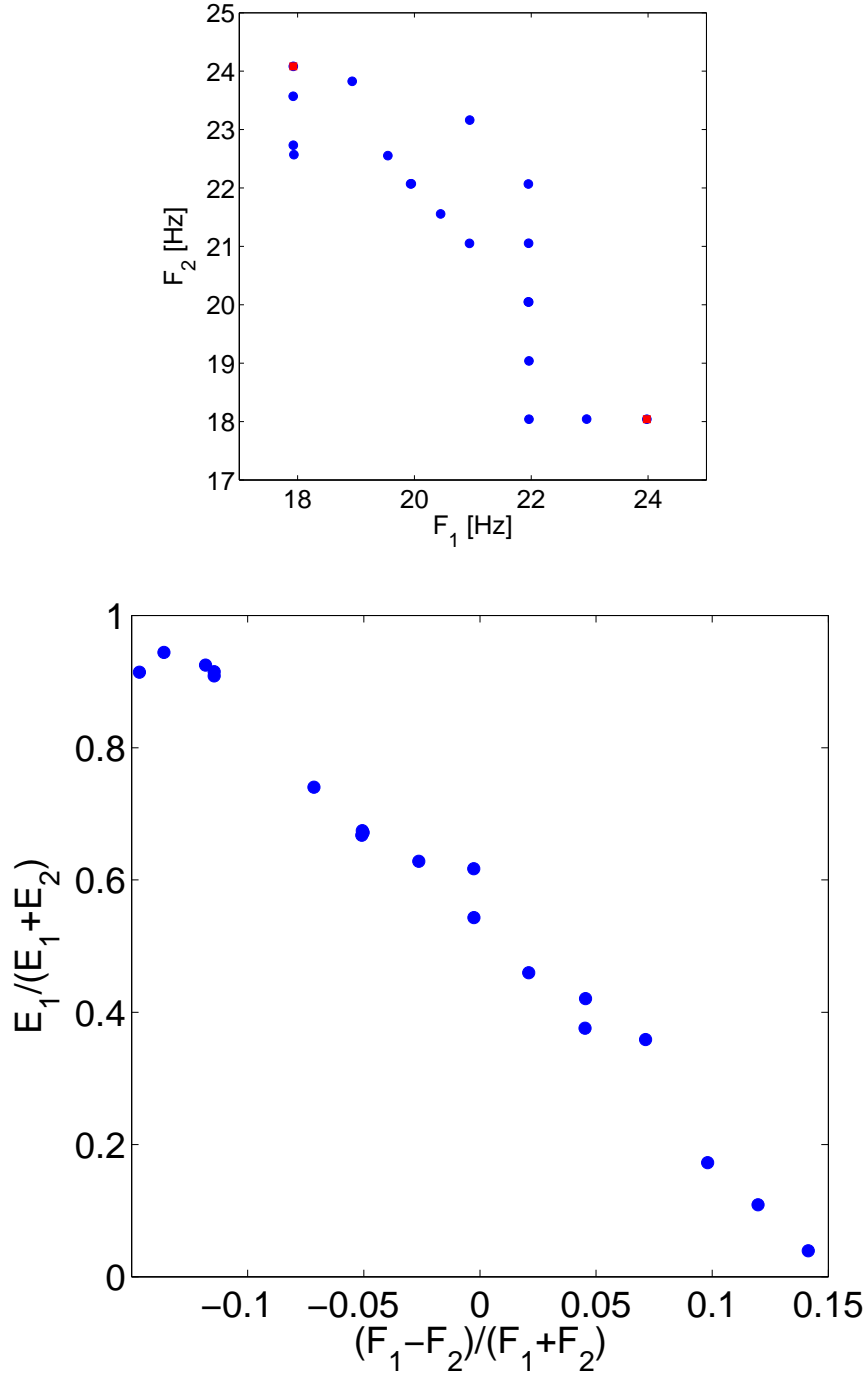


FIGURE 2.16 – Localisation de l'énergie magnétique du champ moyen mesuré aux positions P1 et P2. En haut : points utilisés dans l'espace des paramètres (ronds bleus : dynamos stationnaires, carrés rouges : renversements) ; en bas : courbe de localisation. Noter la faible brisure de symétrie nécessaire pour obtenir la localisation hémicylindrique du champ magnétique.

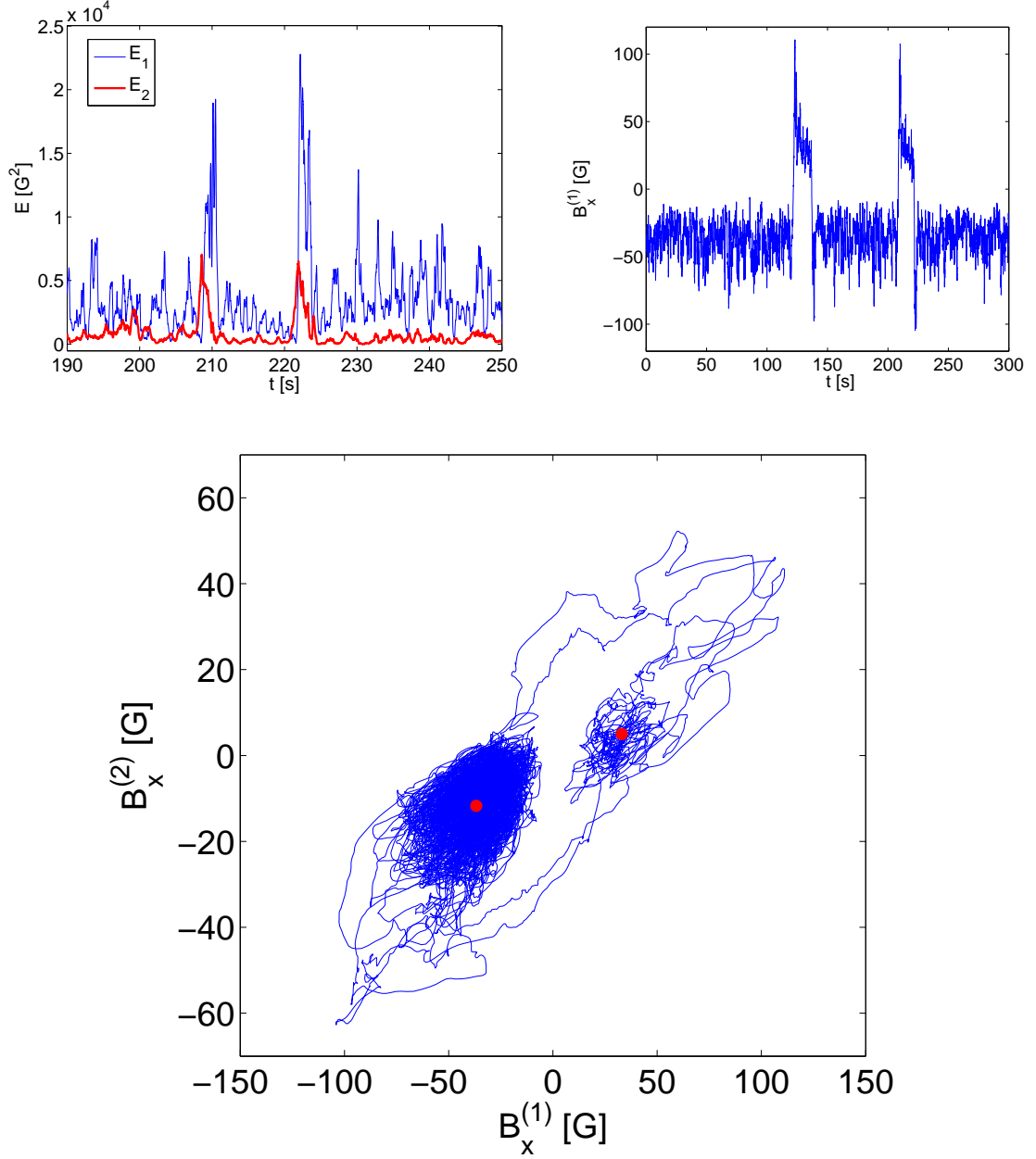


FIGURE 2.17 – Localisation hémicylindrique du champ magnétique au cours d'un renversement. En haut : séries temporelles des énergies magnétiques mesurées près de chacun des disques (à gauche) et du champ axial mesuré à la position P1 (à droite). En bas : espace des phases tracé en portant les champs axiaux mesurés près de chacun des disques (ligne bleue : trajectoire dans l'espace des phases, ronds rouges : points fixes obtenus en moyennant temporellement le champ dans une polarité donnée).

2.A Obtention de la relation de dispersion

Dans la suite des calculs on notera : $j_{l+1/2} = I_{l+1/2}(\sqrt{\tilde{p}})$, $j_{l+1/2}^\chi = I_{l+1/2}(\sqrt{\tilde{p}}\chi)$, $j_{l+1/2}^\xi = I_{l+1/2}(\sqrt{\tilde{p}}\xi)$, $j_{l+1/2}^{\chi\xi} = I_{l+1/2}(\sqrt{\tilde{p}}\chi\xi)$, $j_{l+1/2}^{\chi\xi} = I_{l+1/2}(\sqrt{\tilde{p}}\chi\xi)$, $j_{l+1/2}^{\chi\xi} = I_{l+1/2}(\sqrt{\tilde{p}}\chi\xi)$, $j_{l+1/2}^{\chi\xi} = I_{l+1/2}(\sqrt{\tilde{p}}\chi\xi)$, et de même $k_{l+1/2} = K_{l+1/2}(\sqrt{\tilde{p}})$, $k_{l+1/2}^\chi = K_{l+1/2}(\sqrt{\tilde{p}}\chi)$, etc...

2.A.1 Système d'équations

L'objectif de la suite du calcul est le suivant : chacune des conditions aux limites donne une relation sur les différents coefficients (a_l , b_l , c_l etc...). On souhaite alors combiner ces différentes relations pour éliminer un maximum de coefficients et n'obtenir au final que 2 relations sur les 2 suites de coefficients $(a_l)_{l \in \mathcal{N}}$ et $(b_l)_{l \in \mathcal{N}}$.

Commençons par éliminer s_l :

- A_ϕ continu en $\tilde{r} = 1 \Rightarrow s_l = -c_l j_{l+1/2} - e_l k_{l+1/2}$
- $\partial_{\tilde{r}} A_\phi$ continu en $\tilde{r} = 1 \Rightarrow -(l+1)s_l = c_l \left(\frac{j_{l+1/2}}{2} - \sqrt{\tilde{p}} j'_{l+1/2} \right) + e_l \left(\frac{k_{l+1/2}}{2} - \sqrt{\tilde{p}} k'_{l+1/2} \right)$

Ces deux relations permettent d'éliminer s_l :

$$c_l \left[\sqrt{\tilde{p}} j'_{l+1/2} + (l+1/2) j_{l+1/2} \right] + e_l \left[\sqrt{\tilde{p}} k'_{l+1/2} + (l+1/2) k_{l+1/2} \right] = 0 \quad (2.29)$$

La continuité de A_ϕ en $\tilde{r} = \chi$ fournit par ailleurs la relation :

$$a_l j_{l+1/2}^\chi = c_l j_{l+1/2}^\chi + e_l k_{l+1/2}^\chi \quad (2.30)$$

Les deux dernières relations peuvent être combinées pour obtenir c_l et e_l en fonction de a_l . On écrit alors $c_l = \mathcal{C}_l a_l$ et $e_l = \mathcal{E}_l a_l$, avec :

$$\mathcal{C}_l = \frac{-(\sqrt{\tilde{p}} k'_{l+1/2} + (l+1/2) k_{l+1/2}) j_{l+1/2}^\chi}{(\sqrt{\tilde{p}} j'_{l+1/2} + (l+1/2) j_{l+1/2}) k_{l+1/2}^\chi - (\sqrt{\tilde{p}} k'_{l+1/2} + (l+1/2) k_{l+1/2}) j_{l+1/2}^\chi} \quad (2.31)$$

$$\mathcal{E}_l = \frac{(\sqrt{\tilde{p}} j'_{l+1/2} + (l+1/2) j_{l+1/2}) j_{l+1/2}^\chi}{(\sqrt{\tilde{p}} j'_{l+1/2} + (l+1/2) j_{l+1/2}) k_{l+1/2}^\chi - (\sqrt{\tilde{p}} k'_{l+1/2} + (l+1/2) k_{l+1/2}) j_{l+1/2}^\chi} \quad (2.32)$$

On procède de la même manière pour exprimer les coefficients d_l et f_l en fonction de b_l :

- $B_\phi(\tilde{r} = 1) = 0 \Rightarrow d_l j_{l+1/2} + f_l k_{l+1/2} = 0$
- $\partial_{\tilde{r}}(\tilde{r} B_\phi)$ continu en $\tilde{r} = \xi \Rightarrow b_l \left(\frac{1}{2\sqrt{\xi}} j_{l+1/2}^\xi + \sqrt{\xi \tilde{p}} j'_{l+1/2}^\xi \right) = d_l \left(\frac{1}{2\sqrt{\xi}} j_{l+1/2}^\xi + \sqrt{\xi \tilde{p}} j'_{l+1/2}^\xi \right) + f_l \left(\frac{1}{2\sqrt{\xi}} k_{l+1/2}^\xi + \sqrt{\xi \tilde{p}} k'_{l+1/2}^\xi \right)$

On combine alors ces deux équations pour obtenir d_l et f_l en fonction de b_l . On écrit alors $d_l = \mathcal{D}_l b_l$ et $f_l = \mathcal{F}_l b_l$, avec :

$$\mathcal{D}_l = \frac{-k_{l+1/2} \left(\frac{1}{2\sqrt{\xi}} j_{l+1/2}^\xi + \sqrt{\xi \tilde{p}} j'_{l+1/2}^\xi \right)}{j_{l+1/2} \left(\frac{1}{2\sqrt{\xi}} k_{l+1/2}^\xi + \sqrt{\xi \tilde{p}} k'_{l+1/2}^\xi \right) - k_{l+1/2} \left(\frac{1}{2\sqrt{\xi}} j_{l+1/2}^\xi + \sqrt{\xi \tilde{p}} j'_{l+1/2}^\xi \right)} \quad (2.33)$$

$$\mathcal{F}_l = \frac{j_{l+1/2} \left(\frac{1}{2\sqrt{\xi}} j_{l+1/2}^\xi + \sqrt{\xi \tilde{p}} j'_{l+1/2}^\xi \right)}{j_{l+1/2} \left(\frac{1}{2\sqrt{\xi}} k_{l+1/2}^\xi + \sqrt{\xi \tilde{p}} k'_{l+1/2}^\xi \right) - k_{l+1/2} \left(\frac{1}{2\sqrt{\xi}} j_{l+1/2}^\xi + \sqrt{\xi \tilde{p}} j'_{l+1/2}^\xi \right)} \quad (2.34)$$

Les deux relations de récurrence cherchées sont alors obtenues à partir des relations 2.8 et 2.9. Les différents termes de ces relations s'écrivent :

$$[B_\theta]_{\chi^-}^{\chi^+} = \sum_{l=1}^{l=+\infty} P_l^1(\cos \theta) a_l \left[(\mathcal{C}_l - 1) \left(\frac{1}{2\chi^{3/2}} j_{l+1/2}^\chi + \frac{\sqrt{\bar{p}}}{\sqrt{\chi}} j_{l+1/2}'^\chi \right) \right. \quad (2.35)$$

$$\left. + \mathcal{E}_l \left(\frac{1}{2\chi^{3/2}} k_{l+1/2}^\chi + \frac{\sqrt{\bar{p}}}{\sqrt{\chi}} k_{l+1/2}'^\chi \right) \right] \\ B_\theta|_{\tilde{r}=\xi} = \sum_{l=1}^{l=+\infty} P_l^1(\cos \theta) a_l \left[\mathcal{C}_l \left(\frac{1}{2\xi^{3/2}} j_{l+1/2}^\xi + \frac{\sqrt{\bar{p}}}{\sqrt{\xi}} j_{l+1/2}'^\xi \right) \right. \quad (2.36)$$

$$\left. + \mathcal{E}_l \left(\frac{1}{2\xi^{3/2}} k_{l+1/2}^\xi + \frac{\sqrt{\bar{p}}}{\sqrt{\xi}} k_{l+1/2}'^\xi \right) \right] \\ [B_\phi]_{\xi^-}^{\xi^+} = \sum_{l=1}^{l=+\infty} P_l^1(\cos \theta) b_l \left[(\mathcal{D}_l - 1) \frac{j_{l+1/2}^\xi}{\sqrt{\xi}} + \mathcal{F}_l \frac{k_{l+1/2}^\xi}{\sqrt{\xi}} \right] \quad (2.37)$$

$$-B_\phi|_{\tilde{r}=\chi} = \sum_{l=1}^{l=+\infty} P_l^1(\cos \theta) (-b_l) \frac{j_{l+1/2}^\chi}{\sqrt{\chi}} \quad (2.38)$$

Il faut maintenant traiter les termes de la forme $\cos(n\theta) \sum_{l=1}^{l=+\infty} u_l P_l^1(\cos \theta)$. En utilisant la formule $(2l+1) \cos \theta P_l^1(\cos \theta) = (l+1) P_{l-1}^1(\cos \theta) + l P_{l+1}^1(\cos \theta)$, on peut montrer la formule suivante :

$$\cos(\theta) \sum_{l=1}^{l=+\infty} u_l P_l^1(\cos \theta) = \sum_{l=1}^{l=+\infty} \left(\frac{l+2}{2l+3} u_{l+1} + \frac{l-1}{2l-1} u_{l-1} \right) P_l^1(\cos \theta) \quad (2.39)$$

En utilisant les formules $\cos(2\theta) = 2\cos(\theta)^2 - 1$ et $\cos(3\theta) = 4\cos(\theta)^3 - 3\cos(\theta)$, on peut calculer $\cos(2\theta) \sum_{l=1}^{l=+\infty} u_l P_l^1(\cos \theta)$ et $\cos(3\theta) \sum_{l=1}^{l=+\infty} u_l P_l^1(\cos \theta)$ en réappliquant la formule 2.39. On définit alors la suite de fonction $(\mathcal{G}_l((u_n)_{n \in \mathcal{N}^*}, Ra, Rb, Rc, Rd))_{l \in \mathcal{N}}$ de la manière suivante :

$$[Ra + Rb \cos(\theta) + Rc \cos(2\theta) + Rd \cos(3\theta)] \sum_{l=1}^{l=+\infty} u_l P_l^1(\cos \theta) = \quad (2.40)$$

$$\sum_{l=1}^{l=+\infty} \mathcal{G}_l((u_n)_{n \in \mathcal{N}^*}, Ra, Rb, Rc, Rd) P_l^1(\cos \theta)$$

et on obtient :

$$\mathcal{G}_l((u_n)_{n \in \mathcal{N}^*}, Ra, Rb, Rc, Rd) = u_{l-3} \left[Rd \frac{4(l-1)(l-2)(l-3)}{(2l-1)(2l-3)(2l-5)} \right] + u_{l-2} \left[Rc \frac{2(l-1)(l-2)}{(2l-1)(2l-3)} \right] \quad (2.41)$$

$$+ u_{l-1} \left[Rb \frac{l-1}{2l-1} + Rd \left(\frac{4l(l-1)(l+2)}{(2l-1)(2l+1)(2l+3)} + \frac{4(l-1)^2(l+1)}{(2l-1)^2(2l+1)} + \frac{4l(l-1)(l-2)}{(2l-1)^2(2l-3)} - \frac{3(l-1)}{2l-1} \right) \right]$$

$$+ u_l \left[Ra + Rc \left(\frac{2l(l+2)}{(2l+1)(2l+3)} + \frac{2(l-1)(l+1)}{(2l-1)(2l+1)} - 1 \right) \right]$$

$$+ u_{l+1} \left[Rb \frac{l+2}{2l+3} + Rd \left(\frac{4(l+1)(l+2)(l+3)}{(2l+3)^2(2l+5)} + \frac{4(l+2)^2}{(2l+1)(2l+3)^2} + \frac{4(l-1)(l+1)(l+2)}{(2l-1)(2l+1)(2l+3)} - \frac{3(l+2)}{2l+3} \right) \right]$$

$$+ u_{l+2} \left[Rc \frac{2(l+2)(l+3)}{(2l+3)(2l+5)} \right] + u_{l+3} \left[Rd \frac{4(l+2)(l+3)(l+4)}{(2l+3)(2l+5)(2l+7)} \right]$$

A partir des relations 2.36 et 2.38, on définit les coefficients :

$$\tilde{a}_l = a_l \left[\mathcal{C}_l \left(\frac{1}{2\xi^{3/2}} j_{l+1/2}^\xi + \frac{\sqrt{\bar{p}}}{\sqrt{\xi}} j_{l+1/2}'^\xi \right) + \mathcal{E}_l \left(\frac{1}{2\xi^{3/2}} k_{l+1/2}^\xi + \frac{\sqrt{\bar{p}}}{\sqrt{\xi}} k_{l+1/2}'^\xi \right) \right] \quad (2.42)$$

$$\tilde{b}_l = -b_l \frac{j_{l+1/2}^\chi}{\sqrt{\chi}} \quad (2.43)$$

Les relations 2.8 et 2.9 se réécrivent finalement sous la forme :

$$\tilde{a}_l \frac{(C_l - 1) \left(\frac{1}{2\chi^{3/2}} j_{l+1/2}^\chi + \frac{\sqrt{\tilde{p}}}{\sqrt{\chi}} j_{l+1/2}'^\chi \right) + \mathcal{E}_l \left(\frac{1}{2\chi^{3/2}} k_{l+1/2}^\chi + \frac{\sqrt{\tilde{p}}}{\sqrt{\chi}} k_{l+1/2}'^\chi \right)}{\mathcal{C}_l \left(\frac{1}{2\xi^{3/2}} j_{l+1/2}^\xi + \frac{\sqrt{\tilde{p}}}{\sqrt{\xi}} j_{l+1/2}'^\xi \right) + \mathcal{E}_l \left(\frac{1}{2\xi^{3/2}} k_{l+1/2}^\xi + \frac{\sqrt{\tilde{p}}}{\sqrt{\xi}} k_{l+1/2}'^\xi \right)} \quad (2.44)$$

$$+ \mathcal{G}_l((\tilde{b}_n)_{n \in \mathcal{N}^*}, Ra_1, Rb_1, Rc_1, Rd_1) = 0$$

$$\tilde{b}_l \left[(\mathcal{D}_l - 1) \frac{j_{l+1/2}^\xi}{\sqrt{\xi}} + \mathcal{F}_l \frac{k_{l+1/2}^\xi}{\sqrt{\xi}} \right] \frac{(-\sqrt{\chi})}{j_{l+1/2}^\chi} + \mathcal{G}_l((\tilde{a}_n)_{n \in \mathcal{N}^*}, Ra_2, Rb_2, Rc_2, Rd_2) = 0 \quad (2.45)$$

2.A.2 Relation de dispersion

La relation 2.44 couple \tilde{a}_l à \tilde{b}_{l-3} , \tilde{b}_{l-2} , \tilde{b}_{l-1} , \tilde{b}_l , \tilde{b}_{l+1} , \tilde{b}_{l+2} , et \tilde{b}_{l+3} , tandis que la relation 2.45 couple \tilde{b}_l à \tilde{a}_{l-3} , \tilde{a}_{l-2} , \tilde{a}_{l-1} , \tilde{a}_l , \tilde{a}_{l+1} , \tilde{a}_{l+2} , et \tilde{a}_{l+3} . Si on tronque le système d'équations au-delà de $l = L$, les relations 2.44 et 2.45 écrites pour $l \in \{1, 2, \dots, L\}$ forment un système de $2L$ équations à $2L$ inconnues. Pour que le système admette une autre solution que la solution triviale 0, il faut que le déterminant de ce système soit nul. Cette relation est la relation de dispersion du système tronqué à L modes, elle fixe les valeurs possibles de \tilde{p} . Il convient de vérifier que la troncature est justifiée : dans chacun des cas présentés ci-après, si on double le nombre de modes (c'est-à-dire la valeur de L), on obtient le même valeur de \tilde{p} à moins de 0.1% près.

Chapitre 3

Dérive d'un motif sous l'effet d'une brisure de symétrie

Différentes instabilités hydrodynamiques conduisent à la formation d'un motif périodique au-delà du seuil d'instabilité. On peut penser par exemple à la convection de Rayleigh-Bénard entre deux plaques parallèles et infinies. Lorsque la différence de température entre les deux plaques est suffisamment grande, le fluide se met en mouvement par instabilité et un écoulement s'organise sous la forme d'une succession de rouleaux. Dans les cas les plus simples, cette instabilité est supercritique et stationnaire. Elle correspond à la croissance d'un mode instable de vecteur d'onde horizontal $\vec{k} = k_c \vec{e}_x$, où k_c est le nombre d'onde du premier mode instable. Ce mode instable s'écrit $\phi(x, t) = A(t)e^{ik_c x} + c.c.$, et $A(t)$ vérifie une équation d'amplitude qui s'écrit a priori à l'ordre linéaire :

$$\dot{A} = aA + b\bar{A} \quad (3.1)$$

La symétrie du problème de départ par translation selon x impose l'invariance de l'équation d'amplitude par changement de phase de A . Ainsi $b = 0$. De plus, le problème de départ est invariant sous la symétrie $x \rightarrow -x$, qui se traduit dans l'équation d'amplitude par une symétrie $A \rightarrow \bar{A}$. On en déduit alors que a est un nombre réel : le mode d'instabilité est stationnaire, et son amplitude croît jusqu'à être saturée par les nonlinéarités.

Imaginons maintenant que l'on brise faiblement la symétrie $x \rightarrow -x$, le coefficient a n'a alors plus de raison d'être réel et est a priori complexe. La solution s'écrit alors $A(t=0)e^{Re(a)t}e^{iIm(a)t}$ et en revenant au champ ϕ on voit que le motif se propage dans la direction x . Ainsi, en géométrie infinie, une brisure faible de symétrie $x \rightarrow -x$ conduit nécessairement à la propagation du motif. Cette propagation peut être comprise comme résultante du couplage de deux modes : le premier est le mode d'instabilité, et le second est le même mode, mais décalé d'un quart de période spatiale. En géométrie infinie, ces deux modes s'obtiennent l'un à partir de l'autre par simple translation selon x , si bien qu'ils ont le même taux de croissance. Une brisure de symétrie infiniment faible va alors suffire pour les coupler et engendrer un mode propagatif.

L'objet de la présente étude est de caractériser le passage de la géométrie infinie à la géométrie finie inhérente à tout dispositif expérimental. En géométrie finie, les deux modes qui se couplent ne sont plus reliés par une simple translation : ils ont des taux de croissance et des structures spatiales distinctes. De plus, à l'ordre le plus bas, les deux modes qui se couplent se transforment différemment sous la symétrie $x \rightarrow -x$: l'un est inchangé, tandis que l'autre se transforme en son opposé. Ce problème présente donc une très forte analogie avec le problème des renversements du champ magnétique dans l'expérience VKS : deux modes d'instabilité - le dipôle et le quadrupôle - qui se transforment différemment sous l'effet d'une symétrie discrète - la symétrie \mathcal{R}_π - sont découplés à l'ordre linéaire. Lorsque l'on brise cette symétrie, ces deux modes se couplent

et peuvent engendrer une dynamique oscillante selon les mécanismes mis en évidence dans les chapitres précédents.

Nous nous intéresserons aux trois questions suivantes :

- Lorsque les bords sont repoussés à l’infini, la dérive s’obtient pour une brisure de symétrie infiniment faible. En géométrie finie, il faut dépasser une amplitude critique de la brisure de symétrie pour obtenir la dérive du motif. Comment cette amplitude critique dépend-elle de la taille du domaine ?
- Lors de l’étude théorique du champ magnétique engendré par effet dynamo, nous avons vu qu’une brisure de symétrie \mathcal{R}_π conduit soit à des oscillations, soit à une localisation du mode instable d’un côté du domaine uniquement. Comment ces résultats s’appliquent-ils au problème de la dérive d’un motif ? Quel type de brisure de symétrie conduit à une propagation ?
- Quel est l’effet des termes non-linéaires ? Dans quelle mesure une étude linéaire suffit-elle à prédire la dynamique du motif ?

3.1 Position du problème

3.1.1 Modèle de Swift-Hohenberg en géométrie finie

L’apparition d’un motif périodique unidimensionnel à longueur d’onde finie est bien décrite au voisinage du seuil d’instabilité par le modèle de Swift-Hohenberg [24], qui s’écrit :

$$\partial_t \phi = \alpha \phi - (\partial_{xx} + k_c^2)^2 \phi + NL\{\phi\} \quad (3.2)$$

où $NL\{\phi\}$ représente les termes non linéaires, que l’on ne prendra en compte que dans la section 3.3. Dans la suite on choisit l’échelle de longueur de manière à obtenir $k_c = \pi$. On souhaite étudier le problème en géométrie finie, et on appelle L la taille du domaine. L’équation de Swift-Hohenberg étant d’ordre quatre en x , nous choisissons le cas simple où les quatre conditions aux limites sont :

$$\phi|_{x=0} = \phi|_{x=L} = \partial_{xx}(\phi)|_{x=0} = \partial_{xx}(\phi)|_{x=L} = 0 \quad (3.3)$$

On souhaite décrire perturbativement le couplage de deux modes propres de symétrie différente sous l’effet d’une brisure faible de symétrie. La dynamique du champ total est bien décrite si ces deux modes sont les deux seuls modes présents dans la variété centrale du problème. En géométrie infinie, les modes propres de l’équation de Swift-Hohenberg sont $\phi(x) = \sin(kx)$, avec $k \in \mathcal{R}$. Ils ont un taux de croissance $\sigma = \alpha - (\pi^2 - k^2)^2$. En géométrie finie, les conditions aux limites (3.3) sélectionnent les valeurs possibles du vecteur d’onde $k = n\pi/L$, $n \in \mathcal{N}^*$. Sur la figure 3.1 sont représentés les taux de croissance des différents modes d’instabilité. Deux cas limites sont envisageables :

- Dans le premier cas, la longueur L du domaine est proche d’un demi-entier $n_0 + 1/2$, $n_0 \in \mathcal{N}^*$. Dans ce cas, au voisinage du seuil d’instabilité les deux seuls modes présents dans la variété centrale correspondent à $n = n_0$ et $n = n_0 + 1$. On peut alors traiter perturbativement l’effet d’une brisure de symétrie en prenant en compte uniquement l’interaction de ces deux modes.
- Dans le second cas, la longueur L du domaine est proche d’un entier n_0 , $n_0 \in \mathcal{N}^*$. Au franchissement du seuil seul le mode $n = n_0$ est instable. Au delà du seuil d’autres modes deviennent instables, mais on ne peut plus isoler une variété centrale comportant un faible nombre de modes.

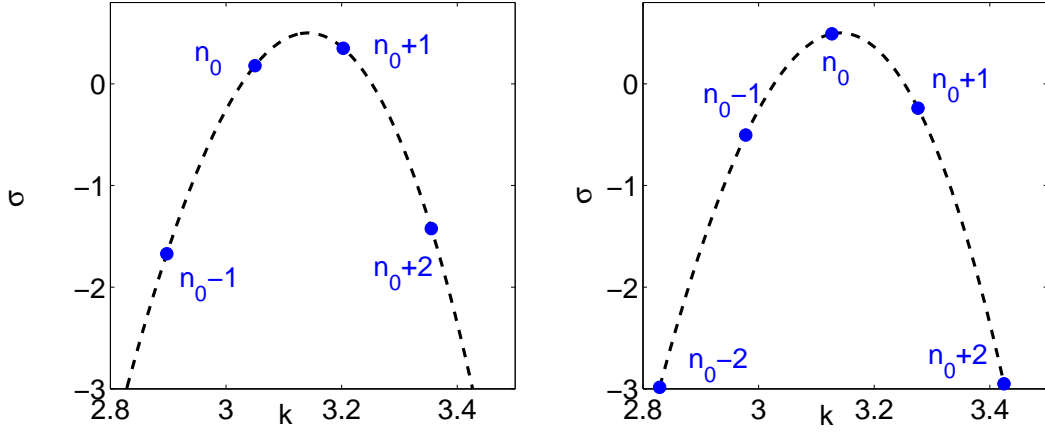


FIGURE 3.1 – Taux de croissance des différents modes propres au voisinage du seuil d’instabilité. À gauche, la longueur L est proche d’un demi-entier, et la variété centrale comporte uniquement deux modes propres. À droite, la longueur L est proche d’une valeur entière et il n’est pas possible d’extraire une variété centrale contenant plus de 1 mode.

Les calculs présentés dans la suite ne sont donc valides en toute rigueur que dans le premier cas, lorsque les deux modes propres n_0 et n_0+1 ne sont que très légèrement instables (α seulement légèrement positif). Le domaine de validité du calcul, en termes de valeurs de α , décroît comme $1/L^2$ quand L tend vers l’infini.

3.1.2 Brisure de symétrie par réflexion

Décomposons le champ ϕ sur les deux modes de la variété centrale :

$$\phi(x, t) = d(t)\mathcal{D}(x) + q(t)\mathcal{Q}(x), \text{ avec } \begin{cases} \mathcal{D}(x) &= \sin(n\pi x/L) \\ \mathcal{Q}(x) &= \sin((n+1)\pi x/L) \end{cases} \quad (3.4)$$

Ici n est la partie entière de L , i.e. $n < L < n+1$. Le problème de départ possède la symétrie $\mathcal{S} : x = L/2 + y \rightarrow x' = L/2 - y$, qui correspond à une réflexion par rapport au milieu du domaine. Sous cette symétrie l’un des deux modes se transforme en son opposé (\mathcal{D} ou \mathcal{Q} , suivant la parité de n), tandis que l’autre reste inchangé. Ces deux modes sont donc découplés à l’ordre linéaire.

On ajoute au membre de droite de l’équation de Swift-Hohenberg une perturbation linéaire $\epsilon\mathcal{L}(\phi)$, avec $\epsilon \ll 1$, pour obtenir l’équation de Swift-Hohenberg perturbée :

$$\partial_t \phi = \alpha \phi - (\partial_{xx} + k_c^2)^2 \phi + \epsilon \mathcal{L}(\phi) + NL\{\phi\} \quad (3.5)$$

Remarquez que l’on peut toujours décomposer une perturbation linéaire en somme d’un opérateur ”symétrique” (i.e. qui laisse invariante la parité de ϕ par \mathcal{S}) et d’un opérateur ”antisymétrique” (i.e. telle que $\mathcal{L}(\phi)$ a une parité inverse de celle de ϕ). On s’intéresse uniquement ici aux perturbations linéaires ”antisymétriques” par \mathcal{S} . Ainsi, si ϕ est paire par \mathcal{S} , $\mathcal{L}(\phi)$ est impaire, et vice-versa. Ces perturbations sont celles qui brisent la symétrie \mathcal{S} et qui couplent \mathcal{D} et \mathcal{Q} . ϵ mesure donc l’amplitude de la brisure de symétrie.

Pour traiter de manière perturbative l'effet de la brisure de symétrie, introduisons le produit scalaire :

$$\langle \phi | \psi \rangle = \int_{x=0}^{x=L} \phi(x) \psi(x) dx \quad (3.6)$$

et notons :

$$(\partial_{xx} + k_c^2)^2 \mathcal{D} = \pi^4 \left(1 - \frac{n^2}{L^2}\right)^2 \mathcal{D} \equiv \beta_d \mathcal{D} \quad (3.7)$$

$$(\partial_{xx} + k_c^2)^2 \mathcal{Q} = \pi^4 \left(1 - \frac{(n+1)^2}{L^2}\right)^2 \mathcal{Q} \equiv \beta_q \mathcal{Q} \quad (3.8)$$

$$\beta = \frac{\beta_d + \beta_q}{2} = \frac{\pi^4}{2} \left[\left(1 - \frac{n^2}{L^2}\right)^2 + \left(1 - \frac{(n+1)^2}{L^2}\right)^2 \right] \quad (3.9)$$

$$\delta = \frac{\beta_d - \beta_q}{2} = \frac{\pi^4}{2} \left[\left(1 - \frac{n^2}{L^2}\right)^2 - \left(1 - \frac{(n+1)^2}{L^2}\right)^2 \right] \quad (3.10)$$

La partie linéaire du membre de droite de l'équation (3.2) est auto-adjointe, si bien que l'on peut insérer la décomposition (3.4) dans l'équation de Swift-Hohenberg perturbée, puis en prendre le produit scalaire avec \mathcal{D} et \mathcal{Q} pour obtenir les deux équations :

$$\dot{d} = (\alpha - \beta_d)d + \epsilon d \frac{\langle \mathcal{L}(\mathcal{D}) | \mathcal{D} \rangle}{\langle \mathcal{D} | \mathcal{D} \rangle} + \epsilon q \frac{\langle \mathcal{L}(\mathcal{Q}) | \mathcal{D} \rangle}{\langle \mathcal{D} | \mathcal{D} \rangle} \quad (3.11)$$

$$\dot{q} = (\alpha - \beta_q)q + \epsilon d \frac{\langle \mathcal{L}(\mathcal{D}) | \mathcal{Q} \rangle}{\langle \mathcal{Q} | \mathcal{Q} \rangle} + \epsilon q \frac{\langle \mathcal{L}(\mathcal{Q}) | \mathcal{Q} \rangle}{\langle \mathcal{Q} | \mathcal{Q} \rangle} \quad (3.12)$$

\mathcal{L} est un opérateur linéaire antisymétrique par \mathcal{S} , donc $\langle \mathcal{L}(\mathcal{D}) | \mathcal{D} \rangle = \langle \mathcal{L}(\mathcal{Q}) | \mathcal{Q} \rangle = 0$. On pose :

$$\gamma_{dq} = \frac{\langle \mathcal{L}(\mathcal{Q}) | \mathcal{D} \rangle}{\langle \mathcal{D} | \mathcal{D} \rangle} \quad (3.13)$$

$$\gamma_{qd} = \frac{\langle \mathcal{L}(\mathcal{D}) | \mathcal{Q} \rangle}{\langle \mathcal{Q} | \mathcal{Q} \rangle} \quad (3.14)$$

L'évolution de la variable complexe $A(t) = d(t) + iq(t)$ est alors régie par l'équation :

$$\dot{A} = \left[(\alpha - \beta) + i \frac{\epsilon}{2} (\gamma_{qd} - \gamma_{dq}) \right] A + \left[-\delta + i \frac{\epsilon}{2} (\gamma_{qd} + \gamma_{dq}) \right] \bar{A} \quad (3.15)$$

On reconnaît l'équation qui régit l'évolution couplée de deux modes de champ magnétique, l'un de symétrie dipolaire et l'autre de symétrie quadrupolaire, et l'on écrit en conséquence :

$$\mu_r = \alpha - \beta \quad (3.16)$$

$$\mu_i = \frac{\epsilon}{2} (\gamma_{qd} - \gamma_{dq}) \quad (3.17)$$

$$\nu_r = -\delta \quad (3.18)$$

$$\nu_i = \frac{\epsilon}{2} (\gamma_{qd} + \gamma_{dq}) \quad (3.19)$$

Les coefficients de couplage μ_i et ν_i sont bien proportionnels à l'amplitude ϵ de la brisure de symétrie. Comme décrit précédemment, si μ_i croît plus que ν_i on peut obtenir un mode propagatif par bifurcation noeud-col, tandis que si ν_i croît plus vite que μ_i , on obtient une localisation de l'énergie d'un côté du domaine. Dans ce qui suit, on s'intéresse plus en détail à quelques exemples précis de brisures de symétrie.

3.2 Quelques exemples de brisure de symétrie

3.2.1 Ecoulement horizontal traversant

Considérons de nouveau l'exemple de la convection de Rayleigh-Bénard dans un domaine de taille finie, avec des conditions aux limites libres en haut et en bas de ce domaine : le champ scalaire ϕ du modèle de Swift-Hohenberg peut être par exemple la composante verticale de vitesse à mi-hauteur entre les deux plaques, et le mode bifurqué correspond à l'apparition des rouleaux de convection. La présence de parois rigides en $x = 0$ et $x = L$ impose bien la nullité de la vitesse verticale ϕ aux deux bords. Une manière de briser la symétrie S dans ce système consiste à remplacer ces parois par des parois poreuses, afin d'injecter du fluide d'un côté et d'en aspirer de l'autre. On impose ainsi une vitesse horizontale uniforme, que l'on notera pour plus de simplicité $-\epsilon \vec{e}_x$. Les conditions aux bords pour ϕ restent inchangées, car la vitesse verticale s'annule toujours au contact du poreux. L'équation de Swift-Hohenberg contient alors un terme supplémentaire qui décrit l'advection de la vitesse verticale par l'écoulement horizontal :

$$\partial_t \phi = \alpha \phi - (\partial_{xx} + k_c^2) \phi + \epsilon \partial_x \phi \quad (3.20)$$

Ainsi l'opérateur de perturbation linéaire dans ce cas s'écrit $\mathcal{L}(\phi) = \partial_x \phi$, et est bien anti-symétrique vis-à-vis de la symétrie \mathcal{S} .

Seuil de dérive

Les deux modes \mathcal{D} et \mathcal{Q} sont tels que $\langle \mathcal{D} | \mathcal{D} \rangle = \langle \mathcal{Q} | \mathcal{Q} \rangle = L/2$. Afin de calculer les différents coefficients de couplage, remarquons tout d'abord que :

$$\gamma_{dq} = \frac{2}{L} (\langle \partial_x \mathcal{Q} | \mathcal{D} \rangle) = \frac{2}{L} \int_0^L \partial_x(\mathcal{Q}) \mathcal{D} dx = \frac{2}{L} \int_0^L (\partial_x(\mathcal{Q}\mathcal{D}) - \partial_x(\mathcal{D})\mathcal{Q}) dx = -\gamma_{qd} \quad (3.21)$$

On obtient donc $\nu_i = 0$, et :

$$\mu_i = \epsilon \frac{2(n+1)}{L} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right) \quad (3.22)$$

Ainsi cette perturbation conduit à une propagation du motif quand son amplitude dépasse une valeur critique ϵ_c . Cette valeur critique est donnée par l'égalité $|\mu_i| = |\nu_r|$, soit :

$$\epsilon_c = \pm \frac{\pi^4 L}{4} \frac{\left(1 - \frac{n^2}{L^2} \right)^2 - \left(1 - \frac{(n+1)^2}{L^2} \right)^2}{\frac{n+1}{2n+1} - n - 1} \quad (3.23)$$

On rappelle que cette formule est valide au voisinage de L demi-entier, et on pose donc $L = n + 1/2 + \xi$. Un développement pour $\xi \ll 1$ et $L \gg 1$ conduit à :

$$\epsilon_c \simeq \pm \frac{2\pi^4 \xi}{(n + 1/2)^2} \quad (3.24)$$

Pour $\xi = 0$, cette quantité s'annule : quand la longueur du domaine est un demi-entier, les deux modes de la variété centrale ont des taux de croissance égaux, si bien qu'une brisure de symétrie infiniment faible suffit à les coupler pour engendrer une propagation du motif.

Le sens de dérive du motif dépend évidemment du signe de ϵ :

- Si $\epsilon > |\epsilon_c|$, alors $\mu_i > |\nu_r|$, et la phase de l'amplitude complexe A croît dans le temps. Le mode propre passe donc successivement par les états $\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{Q} \rightarrow -\mathcal{D} \rightarrow -\mathcal{Q} \rightarrow \dots$, ce qui correspond à un mode qui se propage vers les x négatifs.

- Si $\epsilon < -|\epsilon_c|$, alors $\mu_i < -|\nu_r|$, et la phase de l'amplitude complexe A décroît dans le temps. Le mode propre passe donc successivement par les états $\mathcal{D} \rightarrow -\mathcal{Q} \rightarrow -\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{Q} \rightarrow \dots$, ce qui correspond à un mode qui se propage vers les x positifs.

Le sens de dérive du motif se comprend donc intuitivement en se rappelant que ce dernier est advecté par une vitesse horizontale $-\epsilon \vec{e}_x$.

Interpolation

Le calcul précédent n'est valable qu'au voisinage de L demi-entier. Cependant, on s'attend à ce que l'injection de fluide puisse conduire à une propagation du motif pour toute valeur de L , pourvu que cette injection soit suffisamment intense. De plus, la formule (3.23) est peu pratique, et nécessite de remplacer à chaque fois n par la partie entière de L . On souhaite donc obtenir une interpolation de ϵ_c qui coïncide avec la formule (3.24) pour toute valeur de L où cette dernière est valide. Une telle interpolation est réalisée par :

$$\epsilon_c^{interp} = \pm \frac{2\pi^3}{L^2} \cos(\pi L) \quad (3.25)$$

Le seuil exact de propagation a été obtenu numériquement à l'aide d'une méthode aux différences finies, décrite dans l'appendice 3.A. La formule (3.25) issue du calcul analytique est comparée à ce calcul numérique sur la figure 3.2. On constate que les deux solutions sont en très bon accord. Pour ce premier exemple de brisure de symétrie, l'amplitude critique maximale nécessaire pour obtenir la propagation du motif se comporte comme L^{-2} : elle décroît rapidement en fonction de L , et tend vers 0 pour un domaine infini.

3.2.2 Variation spatiale des propriétés du système

Une autre possibilité pour briser la symétrie \mathcal{S} consiste à perturber les coefficients de l'équation de Swift-Hohenberg en leur ajoutant une légère dépendance en x .

Variation du forçage avec x

Si l'on pense à la convection de Rayleigh-Bénard, on peut briser la symétrie du système en le forçant plus fort d'un côté que de l'autre, c'est-à-dire en chauffant plus fort près d'une des deux parois verticales (on espère alors que la convection horizontale reste négligeable). Considérons alors l'équation de Swift-Hohenberg dans laquelle le coefficient α est remplacé par $\alpha + \epsilon f(x)$: le forçage est alors une fonction de x . L'opérateur de perturbation linéaire est $\mathcal{L}(\phi) = f(x)\phi$, et pour qu'il soit antisymétrique vis-à-vis de la symétrie \mathcal{S} on impose à $f(x)$ d'être une fonction impaire de $x - L/2$. Les coefficients de couplage sont alors :

$$\gamma_{qd} = \gamma_{dq} = \frac{2}{L} \int_{x=0}^{x=L} f(x) \sin(n\pi x/L) \sin((n+1)\pi x/L) dx \quad (3.26)$$

si bien que $\mu_i = 0$ et $\nu_i \neq 0$: cette perturbation ne peut pas entraîner de propagation du motif, et engendre systématiquement une localisation de celui-ci d'un côté du domaine. Les modes propres localisés ont pour structure spatiale :

$$\begin{cases} \mathcal{D} + \mathcal{Q} = \sin(n\pi x/L) + \sin((n+1)\pi x/L) = \cos(\frac{\pi x}{2L}) \times (-ie^{i(n+1/2)\frac{\pi x}{L}}) + c.c. \\ \mathcal{D} - \mathcal{Q} = \sin(n\pi x/L) - \sin((n+1)\pi x/L) = \sin(\frac{\pi x}{2L}) \times (-e^{i(n+1/2)\frac{\pi x}{L}}) + c.c. \end{cases} \quad (3.27)$$

Pour L grand (et donc $n \gg 1$), le premier facteur est une enveloppe variant lentement dans l'espace, et multipliée par une phase (le second facteur) qui varie rapidement. Les enveloppes

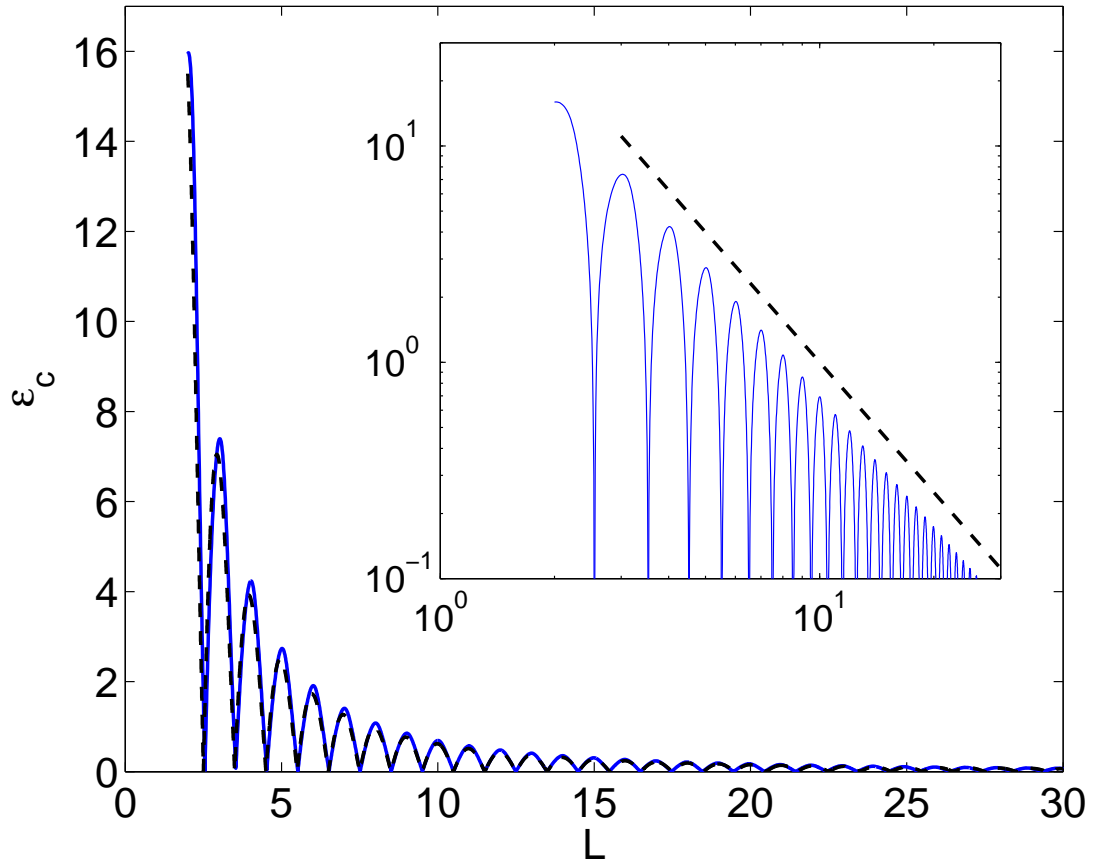


FIGURE 3.2 – Amplitude critique de brisure de symétrie dans le cas d’un écoulement traversant, en fonction de la taille L du domaine. La courbe pleine est le résultat du calcul numérique, et la courbe tiretée provient de la formule (3.25). L’insert est une représentation log-log : la ligne pleine est le résultat du calcul numérique et la ligne tiretée est une loi de puissance d’exposant -2.

ont pour structure un quart de période de cosinus : le premier mode est localisé près de $x = 0$, tandis que le second est localisé près de $x = L$. Ces deux modes propres sont représentés sur la figure 3.3.

Le fait qu’une variation spatiale du forçage seule ne puisse pas conduire à une propagation du motif se comprend simplement par le fait que le problème reste variationnel dans ce cas. En effet, en multipliant l’équation de Swift-Hohenberg perturbée par $\dot{\phi}$ et en intégrant sur la taille du domaine, on obtient après quelques intégrations par parties faisant usage des conditions aux limites (3.3) :

$$-\int_{x=0}^{x=L} (\dot{\phi})^2 dx = \frac{d}{dt} \left[\int_{x=0}^{x=L} (\alpha - \pi^4) \frac{\phi^2}{2} + \pi^2 (\partial_x \phi)^2 - \frac{(\partial_{xx} \phi)^2}{2} dx \right] + \int_{x=0}^{x=L} \epsilon \mathcal{L}(\phi) \dot{\phi} dx \quad (3.28)$$

Pour la perturbation $\mathcal{L}(\phi) = f(x)\phi$, le second terme du membre de droite s’écrit :

$$\frac{d}{dt} \left[\int_{x=0}^{x=L} \frac{\epsilon}{2} f(x) \phi^2 dx \right] \quad (3.29)$$

Le membre de droite de l’équation (3.28) est donc la dérivée temporelle d’une fonctionnelle de ϕ , tandis que le membre de gauche est toujours négatif. Le problème perturbé reste donc

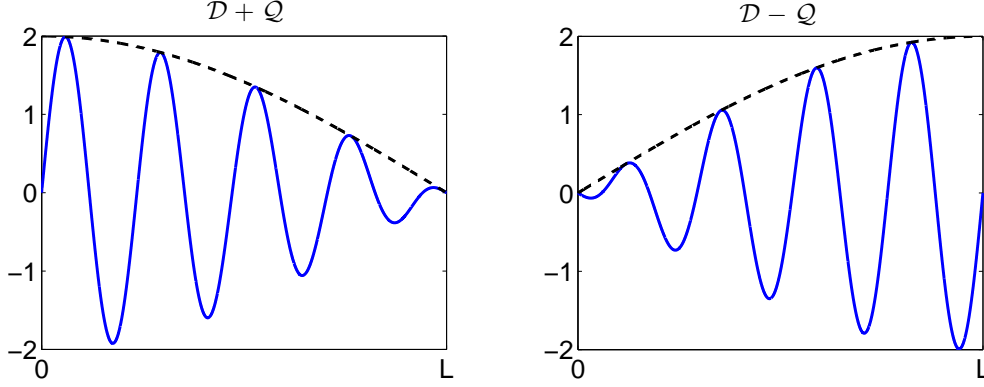


FIGURE 3.3 – Modes propres localisés au voisinage des bords du domaine par une brisure de symétrie, pour $L = 8.6$. La ligne pleine est le mode propre, et la ligne tiretée est son enveloppe.

variationnel, et en présence de termes non-linéaires simples (i.e. eux aussi variationnels), le système va relaxer vers une solution stationnaire qui représente un minimum de la fonctionnelle.

Variation spatiale du nombre d'onde critique au seuil

Un autre coefficient auquel on peut ajouter une légère dépendance spatiale est le nombre d'onde critique au seuil k_c . En pensant toujours à la convection de Rayleigh-Bénard, le nombre d'onde au seuil est proportionnel à la hauteur de la cellule. Ainsi, en introduisant un léger défaut de parallélisme de la cellule, on introduit une dépendance lente de la hauteur de la cellule avec x , et donc du nombre d'onde critique au seuil (cependant, de cette manière on change également le nombre de Rayleigh local, et donc peut-être également le forçage). Considérons donc une perturbation de l'équation de Swift-Hohenberg dans laquelle k_c^2 est remplacé par $k_c^2 + \epsilon g(x)$. L'opérateur linéaire de perturbation à l'ordre ϵ est alors :

$$\mathcal{L}(\phi) = \{g''(x) + 2k_c^2 g(x) + g(x)\partial_{xx}\}\phi \quad (3.30)$$

Pour que cet opérateur soit un opérateur antisymétrique par \mathcal{S} , on impose que g soit une fonction impaire de $x - L/2$.

On rappelle que toute cette analyse est linéaire, si bien que la somme de deux brisures de symétrie $\mathcal{L}_1(\phi) + \mathcal{L}_2(\phi)$ conduit à des coefficients de couplage μ_i et ν_i qui sont la somme des coefficients de couplages obtenus indépendamment pour $\mathcal{L}_1(\phi)$ seul et pour $\mathcal{L}_2(\phi)$ seul. Les deux premiers termes de l'opérateur (3.30) ont été traités dans la sous-section précédente, ils sont variationnels et contribuent uniquement au coefficient ν_i . Le troisième terme en revanche n'est pas variationnel, et contribue à des coefficients de couplage :

$$\gamma_{qd} = \frac{-2n^2\pi^2}{L^3} \int_{x=0}^{x=L} g(x) \sin(n\pi x/L) \sin((n+1)\pi x/L) dx \quad (3.31)$$

$$\gamma_{dq} = \frac{-2(n+1)^2\pi^2}{L^3} \int_{x=0}^{x=L} g(x) \sin(n\pi x/L) \sin((n+1)\pi x/L) dx \quad (3.32)$$

Pour L grand, ces deux coefficients sont quasiment égaux, si bien que $\mu_i \ll \nu_i$. Plus précisément, μ_i est d'ordre ν_i/L .

Le fait que le coefficient μ_i issu de ce troisième terme soit non-nul rend possible la propagation du motif en ajoutant une dépendance spatiale aux coefficients de l'équation de Swift-Hohenberg.

Néanmoins, si elle est possible, elle risque d'être très dure à observer : une possibilité est d'utiliser une variation lente du nombre d'onde critique pour créer du ν_i et un peu de μ_i , puis d'ajouter une variation lente du forçage bien ajustée pour annuler le coefficient ν_i . Ce phénomène pourrait donc être observé expérimentalement, mais le comportement générique - i.e. celui qui est de loin le plus probable - quand on modifie la dépendance spatiale des coefficients de l'équation de Swift-Hohenberg reste la localisation du motif d'un côté du domaine.

3.2.3 Autres brisures de symétrie

D'autres brisures de symétrie peuvent être envisagées. On peut par exemple imaginer briser la symétrie en modifiant de manière dissymétrique les conditions aux bords du domaine. Cette situation est décrite en appendice et permet également d'obtenir une dérive du motif. Un autre exemple de brisure de symétrie consiste à imaginer un motif axisymétrique qui croît dans un espace étroit compris entre deux cylindres coaxiaux et de grands rayons. On peut alors prendre en compte perturbativement la courbure du domaine et montrer que celle-ci peut engendrer une dérive radiale du motif.

3.3 Effet des termes non-linéaires

L'étude de l'effet des nonlinéarités est souvent un problème compliqué, de par la grande diversité des termes envisageables dans les équations d'amplitude. Nous avons vu par exemple que dans le cas de deux modes magnétiques couplés, on peut envisager a priori quatre trinômes en A et \bar{A} . Sans plus d'information sur le système, il est donc difficile de prédire son comportement non-linéaire.

Le problème présent échappe à cette règle : l'utilisation conjointe des symétries et de la limite $L \gg 1$ permet d'intégrrer tous les termes non-linéaires dans un seul coefficient de l'équation d'amplitude. Ce coefficient peut ensuite être éliminé par changement d'échelle de ϕ , ce qui permet de faire une étude du comportement générique du système dans le domaine non-linéaire.

3.3.1 A $L \gg 1$, un seul coefficient gouverne tous les termes non-linéaires

Supposons que le problème de départ soit invariant par changement de signe de ϕ , et limitons nous à des nonlinéarités locales en temps et en espace dans l'équation (3.2) : ces nonlinéarités sont donc à l'ordre le plus bas des termes cubiques en ϕ et ses dérivées spatiales. Le problème non perturbé étant invariant par \mathcal{S} , ces termes cubiques doivent être invariants par changement de signe de x . Le terme $NL(\phi)$ prend donc la forme d'une somme de monômes de degré 3 en ϕ de la forme :

$$\frac{\partial^{n_1} \phi}{\partial x^{n_1}} \times \frac{\partial^{n_2} \phi}{\partial x^{n_2}} \times \frac{\partial^{n_3} \phi}{\partial x^{n_3}}, \text{ avec } n_1 + n_2 + n_3 \in 2\mathcal{N}. \quad (3.33)$$

Lorsque l'on brise faiblement la symétrie \mathcal{S} , on s'attend à faire apparaître également des termes non-linéaires ne respectant pas cette symétrie. Introduisons un développement en échelles multiples afin de montrer que ces termes sont négligeables :

On se place toujours dans la situation où les taux de croissance des modes \mathcal{D} et \mathcal{Q} sont très faibles, d'ordre $\chi \ll 1$. Introduisons alors un temps lent $T = \chi t$, et développons ϕ sous la forme :

$$\phi(x, t) = \sqrt{\chi}(\phi_0(x, T) + \chi\phi_1(x, T) + \dots) \quad (3.34)$$

La dynamique intéressante du motif se produit lorsque la brisure de symétrie ϵ est de l'ordre de grandeur de la différence de taux de croissance des deux modes. On pose donc $\epsilon = \tilde{\epsilon}\chi$, avec $\tilde{\epsilon} = \mathcal{O}(1)$. On écrit enfin l'équation de Swift-Hohenberg sous la forme :

$$\dot{\phi} = \mathcal{L}_{SH}(\phi) + \epsilon \mathcal{L}(\phi) + NL(\phi) \quad (3.35)$$

où \mathcal{L}_{SH} est la partie linéaire de l'équation de Swift-Hohenberg non perturbée :

$$\mathcal{L}_{SH}(\phi) = \alpha\phi - (\partial_{xx} + \pi^2)^2\phi \quad (3.36)$$

Un exemple simple : $NL(\phi) = \eta\phi^3$

Considérons dans un premier temps le cas simple $NL(\phi) = \eta\phi^3$, avec $\eta = \mathcal{O}(1)$. La collecte des termes d'ordre $\sqrt{\chi}$ conduit à :

$$\mathcal{L}_{SH}(\phi_0) = 0 + \mathcal{O}(\chi^{3/2}) \quad (3.37)$$

dont la solution est :

$$\phi_0(T) = d(T)\mathcal{D} + q(T)\mathcal{Q} \quad (3.38)$$

Cette équation traduit le fait que seuls importent les deux modes présents dans la variété centrale, tandis que les autres modes décroissent rapidement vers 0 avec un taux $\mathcal{O}(1)$.

A l'ordre $\mathcal{O}(\chi^{3/2})$, on obtient :

$$\mathcal{L}_{SH}(\phi_1) = -d_T\phi_0 + \mathcal{L}_{SH}(\phi_0) + \tilde{\epsilon}\mathcal{L}(\phi_0) + \eta\phi_0^3 \quad (3.39)$$

On montre aisément à l'aide de quelques intégrations par partie faisant usage des conditions aux bords que l'opérateur \mathcal{L}_{SH} est auto-adjoint. On obtient alors deux conditions de solvabilité en prenant le produit scalaire de l'équation (3.39) avec \mathcal{D} et \mathcal{Q} (on obtient un infiniment petit d'ordre $\mathcal{O}(\chi)$ du côté gauche de l'équation, assimilable à 0, puisque le membre de droite est lui $\mathcal{O}(1)$) :

$$\dot{d} = \text{"partie linéaire"} + \frac{3}{4}\eta d^3 + \frac{3}{2}\eta q^2 d \quad (3.40)$$

$$\dot{q} = \text{"partie linéaire"} + \frac{3}{4}\eta q^3 + \frac{3}{2}\eta d^2 q \quad (3.41)$$

où la partie linéaire du système d'équation a été calculée dans les sections précédentes. En posant toujours $A = d + iq$, ce système d'équations prend la forme :

$$\dot{A} = (\mu_r + i\mu_i)A + (\nu_r + i\nu_i)\bar{A} + \frac{3}{16}\eta(5A^2\bar{A} - \bar{A}^3) \quad (3.42)$$

Généralisation aux autres termes d'ordre trois de l'équation de Swift-Hohenberg

Revenons au choix de la fonction $NL(\phi)$, et montrons que, à $L \gg 1$, sa forme précise n'influe que dans la valeur effective du coefficient η à mettre dans l'équation d'amplitude. Tout d'abord, remarquons que lorsque l'on brise la symétrie \mathcal{S} , on fait a priori apparaître des termes non-linéaires ne respectant pas cette symétrie. Cependant, ces termes sont d'ordre $\epsilon\phi^3 \sim \chi\tilde{\epsilon}\chi^{3/2}\phi_0^3 = \mathcal{O}(\chi^{5/2})$, et n'interviennent donc pas dans la condition de solvabilité à l'ordre $\chi^{3/2}$.

Montrons maintenant que tous les termes d'ordre trois vérifiant la symétrie \mathcal{S} conduisent, dans la limite $L \gg 1$, à un terme non-linéaire de l'équation d'amplitude proportionnel à $5A^2\bar{A} - \bar{A}^3$.

Nous avons déjà montré que c'est le cas pour un terme d'ordre trois de la forme $\eta\phi^3$. Nous pourrions montrer à l'aide d'un calcul similaire qu'un terme non linéaire de la forme $(\partial_x\phi)^2\phi$ conduit aussi à un terme non-linéaire de l'équation d'amplitude proportionnel à $5A^2\bar{A} - \bar{A}^3$, auquel s'ajoutent des corrections $1/L$ fois plus petites et donc négligeables dans la limite d'un domaine grand.

Remarquons maintenant que toute dérivée d'ordre paire de ϕ_0 est "presque proportionnelle" à ϕ_0 , c'est-à-dire proportionnelle à des corrections d'ordre $1/L$ près, et que toute dérivée d'ordre impaire de ϕ_0 est "presque proportionnelle" à $\partial_x(\phi_0)$. A titre d'exemple :

$$\begin{aligned}\partial_{xx}\phi_0 &= d(T)\frac{-n^2\pi^2}{L^2}\mathcal{D} + q(T)\frac{-(n+1)^2\pi^2}{L^2}\mathcal{Q} \\ &= \frac{-n^2\pi^2}{L^2}(d(T)\mathcal{D} + q(T)\mathcal{Q}) - \left(\frac{2n\pi^2}{L^2} + \frac{\pi^2}{L^2}\right)q(T)\mathcal{Q} \\ &= \frac{-n^2\pi^2}{L^2}\phi_0 + \mathcal{O}(1/L) \simeq \frac{-n^2\pi^2}{L^2}\phi_0\end{aligned}\tag{3.43}$$

Les monômes de la forme (3.33) se décomposent alors en deux catégories : ceux qui comportent 3 dérivées paires de ϕ , et qui à $L \gg 1$ sont "presque proportionnels" à ϕ_0^3 , et ceux qui comportent 2 dérivées impaires de ϕ et une paire, et qui à $L \gg 1$ sont "presque proportionnels" à $(\partial_x\phi_0)^2\phi_0$.

A $L \gg 1$, tous ces monômes conduisent donc à un terme non-linéaire de l'équation d'amplitude proportionnel à $5A^2\bar{A} - \bar{A}^3$, auquel s'ajoutent des corrections négligeables d'ordre $1/L$.

On retiendra donc que tous les termes non-linéaires cubiques autorisés dans l'équation de Swift-Hohenberg conduisent au même terme non-linéaire de l'équation d'amplitude. On peut donc se contenter d'étudier l'équation (3.42), en se souvenant que tous les termes cubiques de l'équation de Swift-Hohenberg interviennent dans la valeur du coefficient η . Un changement d'échelle de ϕ permet ensuite de mettre ce coefficient à ± 1 , selon le signe de η . On s'intéressera dans la suite uniquement au cas $\eta < 0$, qui correspond au cas d'une instabilité supercritique.

3.3.2 Dynamique au voisinage d'un point de codimension deux

On considère donc l'équation (3.42) avec $\eta = -1$. Rappelons que le développement précédent n'est valable que pour $\mu_r \ll 1$, et que la transition qui nous intéresse s'effectue près de $|\mu_i| = |\nu| = \sqrt{\nu_r^2 + \nu_i^2}$. Autrement dit, cette transition s'effectue au voisinage d'un point de codimension 2 du système dynamique (voir l'étude de la stabilité linéaire de $A = 0$ effectuée à la fin de la section précédente). La dynamique au voisinage de ce point de codimension 2 a déjà été étudiée dans le cas de deux modes de champ magnétique couplés, et nous a fourni une explication particulièrement simple pour expliquer la bistabilité entre un champ magnétique stationnaire et oscillant. En ce qui concerne le problème présent, on peut alors se demander s'il est possible d'obtenir un système bistable entre un état stationnaire et un état propagatif du motif.

Forme normale et espace des paramètres local

La réduction de l'équation (3.42) à la forme normale au voisinage du point de codimension 2 est décrite en appendice. On obtient le système d'équations :

$$\dot{x} = y\tag{3.44}$$

$$\dot{y} = \tilde{\mu}_1 x + \tilde{\mu}_2 y - x^2 y + \text{signe}(-\mu_i \nu_i \nu_r) \times x^3\tag{3.45}$$

avec :

$$\tilde{\mu}_1 = 50 \frac{|\nu|^3}{\nu_r^2 \nu_i^2} (\mu_i + |\nu|) \quad (3.46)$$

$$\tilde{\mu}_2 = 10 \frac{|\nu|}{|\nu_r \nu_i|} \mu_r \quad (3.47)$$

L'étude de cette forme normale est décrite en détail dans le livre de Guckenheimer et Holmes. Considérons une brisure de symétrie d'amplitude ϵ , qui conduit à des coefficients de couplage $\mu_i = \epsilon \tilde{\mu}_i$ et $\nu_i = \epsilon \tilde{\nu}_i$ dans l'équation (3.42). On s'intéresse à l'espace des paramètres du système, c'est-à-dire aux différents régimes dynamiques rencontrés dans le plan (ϵ, μ_r) . Ces espaces des paramètres sont représentés au voisinage du point de codimension deux sur la figure 3.4. On a choisi pour cette représentation $\nu_r = 1$, $\tilde{\mu}_i = 1$ et $\tilde{\nu}_i = \pm 0.7$, ce qui donne $\epsilon_c = 1.4003$. Décrivons les différentes régions et frontières de ces espaces des paramètres :

- **Cas $\tilde{\mu}_i \tilde{\nu}_i \nu_r > 0$:** dans l'état *I* la solution $A = 0$ est stable et est le seul attracteur du système. Les frontières (1) et (2) sont issues de l'analyse de stabilité linéaire du point fixe $A = 0$: en franchissant la frontière (1) on réalise une bifurcation de Hopf pour atteindre l'état *IV*, où le motif se propage. En franchissant la frontière (2) en revanche, la solution $A = 0$ se déstabilise également, mais au profit d'une solution stationnaire (état *II*). La région notée *III* correspond à la zone de bistabilité entre état stationnaire et état propagatif du motif : si l'on y entre depuis la région *II* on conserve un état stationnaire, alors qu'en venant depuis la région *IV* on y conserve un état oscillant.
- **Cas $\tilde{\mu}_i \tilde{\nu}_i \nu_r < 0$:** dans l'état *V* le système est bistable : la solution $A = 0$ est stable, mais ce point fixe coexiste avec deux autres solutions stationnaires (opposées), qui sont elles aussi stables. Pour être plus précis, hors du bassin d'attraction de la solution $A = 0$ les solutions de la forme normale de codimension deux divergent. x et y croissent, si bien que l'approximation de la forme normale n'est plus vérifiée. Il faut alors revenir à l'équation 3.42 pour voir que les solutions tendent vers un point fixe non nul (ou son opposé). La proximité du point de codimension 2 a donc fait apparaître une solution stationnaire sous-critique. En franchissant la frontière (2), le point $A = 0$ devient linéairement instable, et le seul attracteur est donc la solution apparue par bifurcation sous-critique. La région *VII* est elle aussi une zone de bistabilité : au franchissement de la frontière (1) le point fixe $A = 0$ subit une bifurcation de Hopf supercritique : on observera donc une croissance du champ depuis 0, pour saturer sur un cycle de petite amplitude. Cet état propagatif du motif coexiste avec les deux points fixes stationnaires issus de la bifurcation sous-critique. La frontière (5) correspond à la disparition du cycle limite par bifurcation globale.

Le calcul des frontières (3), (4), et (5) est décrit dans le livre de Guckenheimer et Holmes [17]. Le résultat est :

$$\text{Frontière 3 : } \tilde{\mu}_2 = 0.752 \tilde{\mu}_1, \text{ soit } \mu_r = \frac{7.52}{2} \frac{|\nu|^2}{|\nu_i \nu_r|} (-\mu_i + |\nu|) \quad (3.48)$$

$$\text{Frontière 4 : } \tilde{\mu}_2 = \tilde{\mu}_1, \text{ soit } \mu_r = 5 \frac{|\nu|^2}{|\nu_i \nu_r|} (-\mu_i + |\nu|) \quad (3.49)$$

$$\text{Frontière 5 : } \tilde{\mu}_2 = -\tilde{\mu}_1/5, \text{ soit } \mu_r = -\frac{|\nu|^2}{|\nu_i \nu_r|} (-\mu_i + |\nu|) \quad (3.50)$$

où μ_i , ν_i et $|\nu|$ sont des fonctions simples de ϵ , et où ces expressions sont valables au voisinage du point de codimension deux ($\epsilon = +\epsilon_c$, $\mu_r = 0$).

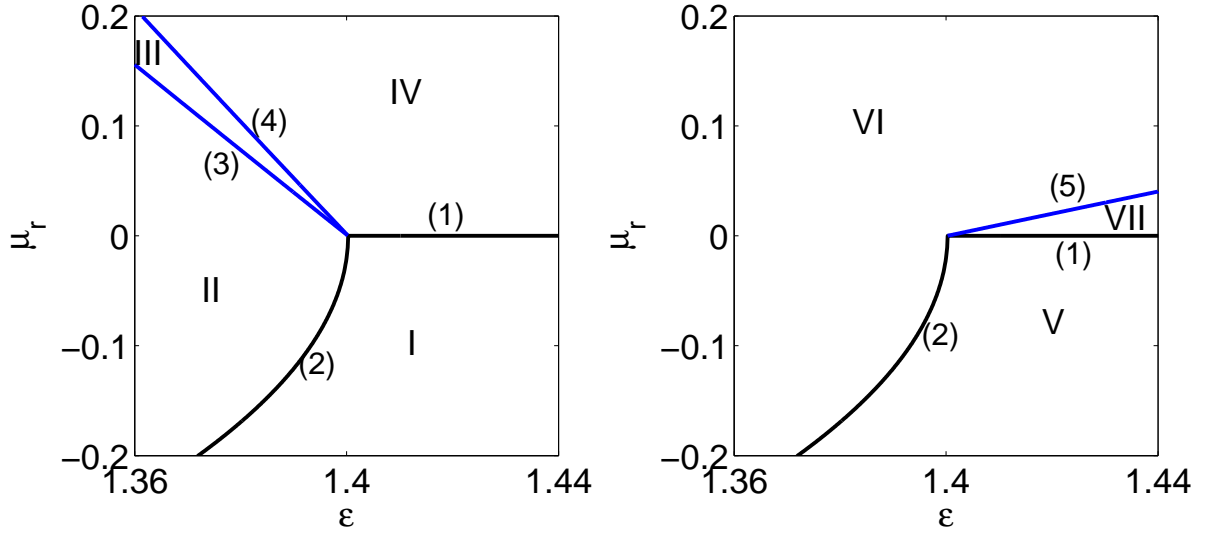


FIGURE 3.4 – Espace des paramètres au voisinage du point de codimension 2, dans les cas $\tilde{\mu}_i \tilde{\nu}_i \nu_r > 0$ (à gauche) et $\tilde{\mu}_i \tilde{\nu}_i \nu_r < 0$ (à droite). *I* : $A = 0$ seul attracteur. *II* : $A = 0$, instable, coexiste avec deux points fixes stables. *III* : Bistabilité entre ces deux points fixes stables et un cycle qui les englobe tous les deux. *IV* : un cycle limite est le seul attracteur du système. *V* : bistabilité entre $A = 0$ et deux points fixes non triviaux. *VI* : les points fixes non triviaux sont les seuls attracteurs. *VII* : bistabilité entre un cycle de faible amplitude et les points fixes non triviaux.

3.3.3 Espace des paramètres global

Nous souhaitons maintenant obtenir une vision globale de l'espace des paramètres du système étudié, qui soit valable également loin du point de codimension 2.

Points fixes stationnaires

Une manière de dégager les grandes frontières de l'espace des paramètres consiste à calculer le nombre de points fixes du système. Reprenons donc l'équation (3.42), avec toujours $\eta = -1$, et introduisons la décomposition $A(t) = r(t)e^{i\theta(t)}$. Après identification des parties réelle et imaginaire, on obtient le système d'équations :

$$\dot{r} = r(\mu_r + \nu_r \cos(2\theta) + \nu_i \sin(2\theta)) - \frac{3r^3}{16}(5 - \cos(4\theta)) \quad (3.51)$$

$$\dot{\theta} = \mu_i - \nu_r \sin(2\theta) + \nu_i \cos(2\theta) - \frac{3}{16}r^2 \sin(4\theta) \quad (3.52)$$

On s'intéresse aux solutions stationnaires du problème, soit $\dot{r} = 0$ et $\dot{\theta} = 0$. L'équation (3.51) conduit à :

$$r^2 = \frac{16}{3(5 - \cos(4\theta))} [\mu_r + \nu_r \cos(2\theta) + \nu_i \sin(2\theta)] \quad (3.53)$$

Cette expression est ensuite introduite dans l'équation (3.52) et conduit après simplification à :

$$\mu_r \sin(4\theta) - 4\nu_i \cos(2\theta) = 5\mu_i - 6\nu_r \sin(2\theta) - \mu_i \cos(4\theta) \quad (3.54)$$

Après développement du $\sin(4\theta)$, le membre de gauche de cette équation est proportionnel à $\cos(2\theta)$. On pose alors $X = \sin(2\theta)$ et on élève l'équation précédente au carré pour obtenir :

$$P(X) = X^4(\mu_i^2 + \mu_r^2) + X^3(-4\mu_r\nu_i - 6\mu_i\nu_r) + X^2(4\mu_i^2 + 9\nu_r^2 + 4\nu_i^2 - \mu_r^2) + X(4\mu_r\nu_i - 12\nu_r\mu_i) + 4\mu_i^2 - 4\nu_i^2 = 0 \quad (3.55)$$

Cette équation est un polynôme de degré 4 en X dont les racines peuvent être extraites de manière analytique. On réalise cette opération à l'aide du logiciel Mathematica. Les seules racines qui correspondent à des points fixes du système dynamique sont celles qui vérifient $r^2 \geq 0$. On écrit donc r^2 en fonction de X . Pour cela, on a besoin du signe de $\cos(2\theta)$, que l'on obtient à partir de l'équation (3.54). Définissons la grandeur $G(\epsilon, \mu_r)$ comme le nombre de valeurs de $r^2 > 0$ (strictement) correspondant à des points fixes du système dynamique. Cette grandeur s'écrit :

$$G(\epsilon, \mu_r) = \text{Card} \left\{ X \in \mathcal{R} / P(X) = 0 \text{ et } \mu_r + \nu_r \sqrt{1 - X^2} \times \text{signe} \left(\frac{\mu_i X^2 - 3\nu_r X + 2\mu_i}{\mu_r X - 2\nu_i} \right) + \nu_i X > 0 \right\} \quad (3.56)$$

où comme toujours $\mu_i = \tilde{\mu}_i \epsilon$ et $\nu_i = \tilde{\nu}_i \epsilon$. Cette grandeur est représentée sur la figure 3.5 pour $\nu_r = 1$, $\tilde{\mu}_i = 1$, et $\tilde{\nu}_i = \pm 0.7$. L'espace des paramètres présente les caractéristiques suivantes :

- Une zone où $G(\epsilon, \mu_r) = 0$, avec $\mu_r < 0$. Dans cette région la solution $A = 0$ est la seule solution du système dynamique, et le motif ne croît pas.
- Une zone où $G(\epsilon, \mu_r) = 0$, avec $\mu_r > 0$. Dans cette région la solution $A = 0$ est linéairement instable, mais il n'y a pas d'autre solution stationnaire du système. Le système décrit donc un cycle limite qui correspond à une propagation du motif.
- Une zone où $G(\epsilon, \mu_r) = 1$. Ici l'un des deux modes propres est devenu linéairement instable. Loin du point de codimension 2, la solution $A = 0$ est connectée à deux points fixes stables et opposés (1 seule valeur de r^2).
- Une zone où $G(\epsilon, \mu_r) = 2$. En venant depuis la zone précédente, le deuxième mode propre devient linéairement instable, et il existe alors les deux couples de points fixes - deux stables, et deux instables - étudiés dans le cadre des renversements de champ magnétique. Lorsque l'on rejoint la zone où $G(\epsilon, \mu_r) = 0$, en passant loin du point de codimension deux, on obtient une propagation du motif par bifurcation noeud-col : les deux points fixes stables collisionnent avec les deux points fixes instables pour former un cycle limite. On remarque de plus que dans le cas $\tilde{\mu}_i \tilde{\nu}_i \nu_r < 0$, au voisinage du point de codimension 2 et à $\mu_r < 0$, il est également possible de passer directement de $G(\epsilon, \mu_r) = 0$ à $G(\epsilon, \mu_r) = 2$: cette transition correspond à l'apparition de la solution sous-critique décrite dans l'analyse de codimension 2. C'est une bifurcation noeud-col inverse, qui crée donc un couple de valeurs de r^2 (4 points fixes).
- Une zone où $G(\epsilon, \mu_r) = 4$, située à μ_r élevé et ϵ proche de 0. Cette zone correspond à la zone de stabilité vis-à-vis de l'instabilité d'Eckhaus. Cette instabilité d'Eckhaus en géométrie finie est l'objet du prochain paragraphe.

On peut se demander comment l'espace des paramètres local au voisinage du point de codimension 2 se reconnecte à l'espace des paramètres plus loin de ce point. En particulier, quand on s'éloigne du point de codimension 2, la transition entre motif stationnaire et motif oscillant ne se fait plus par une zone de bistabilité mais par bifurcation noeud-col. La réponse à cette question se trouve dans la référence [25], dont nous reproduisons un schéma sur la figure 3.6. le cas de gauche correspond à la situation $\tilde{\mu}_i \tilde{\nu}_i \nu_r > 0$ et celui de droite à $\tilde{\mu}_i \tilde{\nu}_i \nu_r < 0$.

Instabilité d'Eckhaus en géométrie finie

En géométrie infinie, l'instabilité d'Eckhaus est une instabilité secondaire par laquelle un motif périodique ayant un vecteur d'onde spatial trop différent de la valeur critique k_c va se

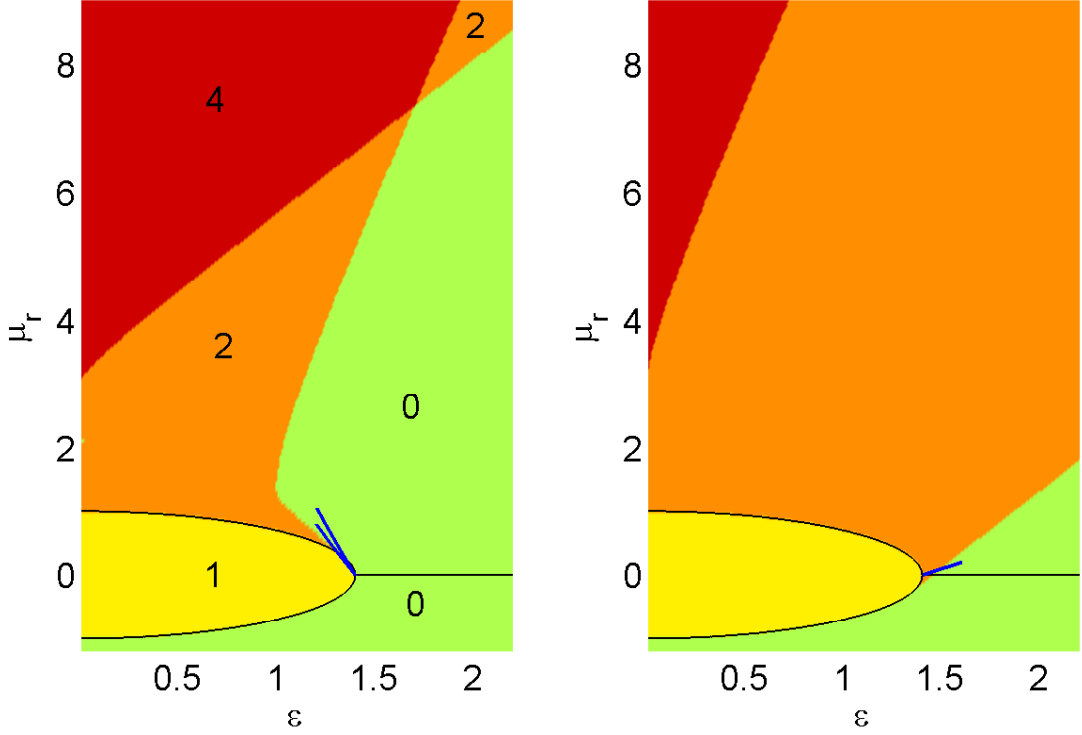


FIGURE 3.5 – Espace des paramètres dans les cas $\tilde{\mu}_i \tilde{\nu}_i \nu_r > 0$ (à gauche) et $\tilde{\mu}_i \tilde{\nu}_i \nu_r < 0$ (à droite). Chaque couleur correspond à un nombre de solutions stationnaires non nulles. Ce nombre est indiqué sur la figure de gauche pour chacune des zones de couleurs. Les traits fins sont issus de l’analyse de stabilité linéaire de $A = 0$, tandis que les lignes épaisses sont les frontières issues de l’analyse de codimension deux.

déformer : par fusion ou annihilation de rouleaux de convection (par exemple), le motif acquiert un vecteur d’onde spatial plus proche de k_c . En géométrie finie, le système que nous étudions est stable vis-à-vis de l’instabilité d’Eckhaus lorsque les points fixes dipolaire et quadrupolaire sont stables. Il est instable vis-à-vis d’Eckhaus lorsque seul un type de points fixes - dipolaires ou quadrupolaires - est stable : le système préfère faire un motif dont la longueur d’onde est proche de la valeur critique calculée en géométrie infinie [26]. Revenons donc sur l’apparition de cette zone où $G(\epsilon, \mu_r) = 4$, en se concentrant tout d’abord sur le cas symétrique $\epsilon = 0$. Dans ce cas, la recherche de solutions stationnaires par l’équation (3.54) se résume à :

$$\mu_r \sin(4\theta) + 6\nu_r \sin(2\theta) = 0, \quad (3.57)$$

que l’on résout graphiquement sur la figure 3.7. Cette résolution est effectuée pour $\nu_r > 0$ en utilisant la nomenclature dipôle-quadrupôle, la résolution à $\nu_r < 0$ étant identique en intervertissant le rôle de chacun de ces deux modes. Considérons donc l’intersection des courbes $-\sin(2\theta)$ et $\frac{\mu_r}{6\nu_r} \sin 4\theta$:

- Tant que $\mu_r/\nu_r < 3$, les deux courbes s’intersectent seulement en $\theta = 0 + p\pi$ et $\theta = \pi/2 + p\pi$: ces solutions correspondent à un dipôle, stable, et à un quadrupôle, qui lui est instable.
- Si $\mu_r/\nu_r > 3$, il apparaît deux nouveaux points d’intersection de part et d’autre de $\theta = \pi/2 + p\pi$. Cette bifurcation correspond à une bifurcation fourche inverse : le quadrupôle est maintenant stable, tandis que les deux nouvelles solutions formées sont des points fixes instables.

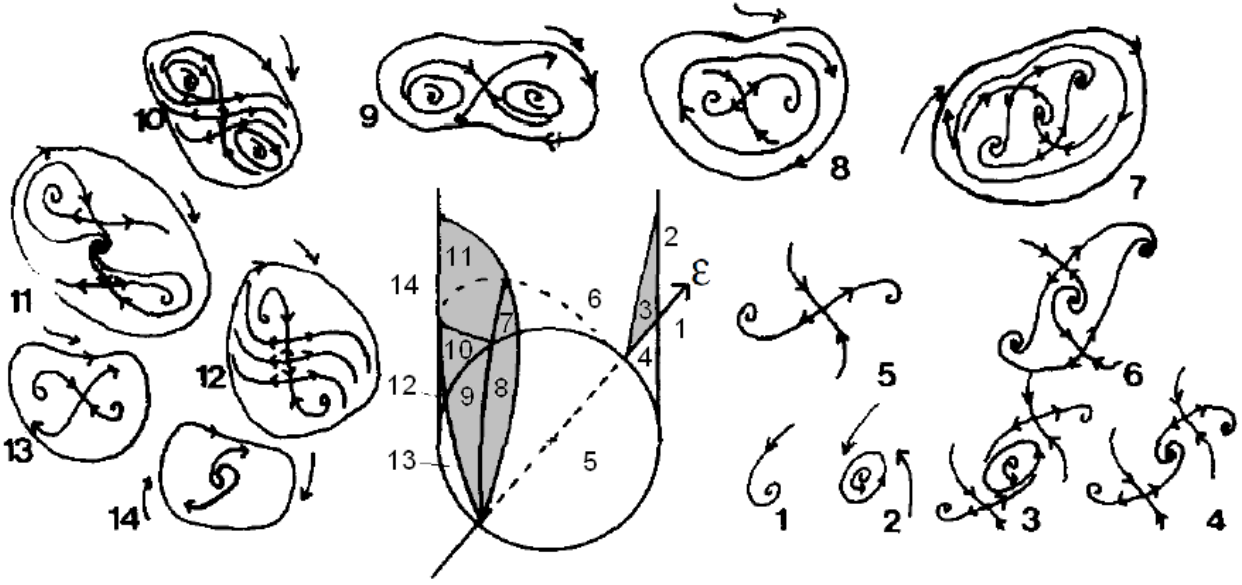


FIGURE 3.6 – Sur ce même graphique sont représentés schématiquement les espaces des paramètres complets pour $\tilde{\mu}_i \tilde{\nu}_i \nu_r > 0$ (partie gauche) et $\tilde{\mu}_i \tilde{\nu}_i \nu_r < 0$ (partie droite). Les zones de bistabilité entre motif stationnaire et propagatif sont grisées. Notez que l'axe des ϵ est incliné dans cette figure tirée de Gambaudo 1985 [25].

- Le seuil de cette instabilité est $\mu_r/\nu_r = 3$, valeur pour laquelle les deux courbes sont tangentes en $\theta = \pi/2 + p\pi$.

Cette bifurcation correspond à l'instabilité d'Eckhaus en géométrie finie : le système, quand il est légèrement au-dessus du seuil, va former un motif dipolaire, dont la périodicité est la plus adaptée à la taille de la cellule (c'est-à-dire que longueur d'onde critique de l'instabilité, considérée en géométrie infinie, est plus proche de celle du mode dipolaire que de celle du quadrupôle). Le mode quadrupolaire est lui instable, et disparaîtra au profit du dipôle. Cependant, si l'on force suffisamment fort le système, le mode quadrupolaire va devenir lui aussi un point fixe stable, bien que sa périodicité soit un peu moins adaptée à la taille du système.

Lorsque l'on brise la symétrie \mathcal{S} , on ajoute une partie paire à l'une des deux fonctions représentées sur la figure 3.7. Imaginons pour simplifier que la brisure de symétrie ait pour effet de translater la courbe tiretée vers le bas : alors, dans la situation du bas, on constate que le mode quadrupolaire va collisionner avec un des points fixes instables, et ainsi disparaître par bifurcation noeud-col : il reste uniquement deux paires de points fixes. Pour cette raison, sur la figure 3.5, si l'on se déplace à μ_r fixé en augmentant ϵ , on perd la stabilité du quadrupôle vis-à-vis d'Eckhaus, pour entrer à nouveau dans le domaine où $G(\epsilon, \mu_r) = 2$.

Afin de préciser un peu plus la forme de l'espace des paramètres, on s'intéresse aux limites asymptotiques de la frontière de stabilité d'Eckhaus et de la frontière stationnaire-oscillant. Cette limite est telle que $\mu_r, \mu_i, \nu_i \gg \nu_r$, si bien que l'on néglige le terme en ν_r de l'équation (3.54), que l'on écrit sous la forme :

$$\frac{\epsilon}{\mu_r} [\tilde{\mu}_i (5 - \cos(4\theta)) + 4\tilde{\nu}_i \cos(2\theta)] = \sin(4\theta) \quad (3.58)$$

On résout cette équation graphiquement. Sur la figure 3.8 sont représentées les deux côtés de l'équation en fonction de θ . Deux situations sont possibles en fonction des signes relatifs de $\tilde{\mu}_i$

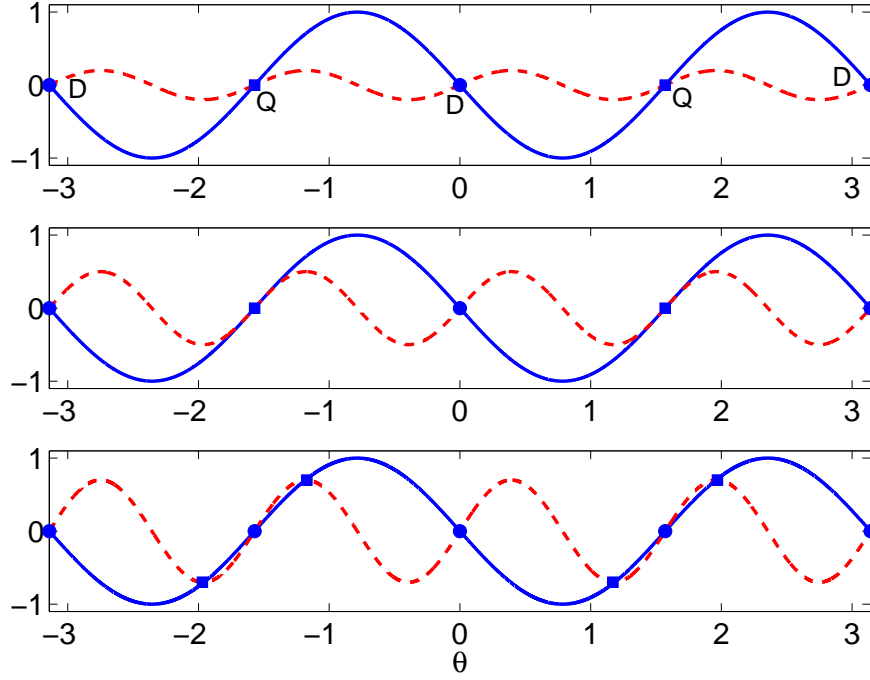


FIGURE 3.7 – Résolution numérique du seuil de l’instabilité d’Eckhaus : la courbe pleine a pour équation $y = -\sin(2\theta)$, tandis que la courbe tiretée a pour équation $y = \frac{\mu_r}{6\nu_r} \sin 4\theta$. Les ronds représentent des points fixes stables, et les carrés des points fixes instables du système dynamique. **En haut** : $\mu_r < 3\nu_r$, et le quadrupôle est instable vis-à-vis de l’instabilité d’Eckhaus. **Au milieu** : $\mu_r = 3\nu_r$, c’est le seuil de l’instabilité d’Eckhaus. Les deux courbes sont tangentes en $\theta = \pi/2 + p\pi$. **En bas** : $\mu_r > 3\nu_r$, deux nouveaux points fixes instables sont apparus de part et d’autre du quadrupôle, qui est maintenant stable vis-à-vis de l’instabilité d’Eckhaus.

et $\tilde{\nu}_i$.

- Pour $\tilde{\mu}_i \tilde{\nu}_i > 0$, c’est le point fixe stable issu de la solution dipolaire qui disparaît le premier par bifurcation noeud-col lorsque $|\epsilon|$ augmente. La seule solution stable restante est alors quadrupolaire. Lorsque $|\epsilon|$ augmente encore, ce point fixe disparaît également par bifurcation noeud-col et le motif se propage.
- Pour $\tilde{\mu}_i \tilde{\nu}_i < 0$, le point fixe stable issu de la solution quadrupolaire disparaît en premier lorsque $|\epsilon|$ augmente, puis le point fixe dipolaire.

En revenant à la figure 3.5, remarquons que dans le cas $\tilde{\mu}_i \tilde{\nu}_i > 0$, la frontière stationnaire-oscillant intersecte la frontière de stabilité d’Eckhaus. D’après l’analyse précédente, dans la zone où $G(\epsilon, \mu_r) = 2$, en dessous du point d’intersection c’est le point fixe issu du dipôle qui est stable (avec toujours l’hypothèse $\nu_r > 0$), tandis qu’au dessus de cette intersection c’est le point fixe issu du quadrupôle qui est stable. Dans le cas $\tilde{\mu}_i \tilde{\nu}_i < 0$, c’est toujours le point fixe issu du dipôle qui est stable pour $G(\epsilon, \mu_r) = 2$

Influence de la taille du domaine

Revenons au problème centrale de cette étude, qui est de caractériser l’influence de la taille du domaine sur la dérive du motif. On souhaite décrire l’évolution de l’espace des paramètres quand L varie au voisinage de $L = n + 1/2$. Considérons donc toujours une brisure symétrie, et supposons-la telle que $\tilde{\mu}_i$ admette une limite finie à L grand, et que $\tilde{\nu}_i$ admette également une

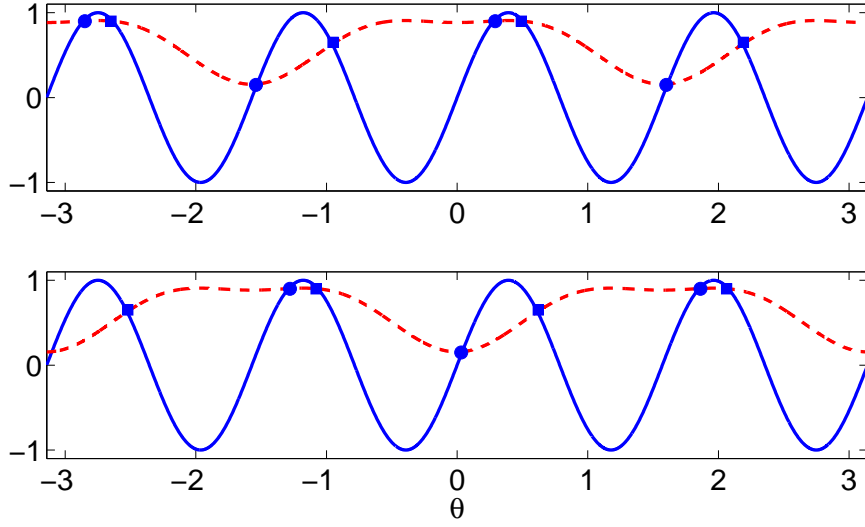


FIGURE 3.8 – Résolution numérique de l'équation (3.58) : la ligne solide est le membre de droite, et la ligne tiretée est celui de gauche pour ϵ proche de la limite de stabilité d'Eckhaus. En haut, $\tilde{\mu}_i \tilde{\nu}_i > 0$, le point fixe issu de la solution dipolaire disparaît en premier lorsque $|\epsilon|$ augmente, puis celui issu de la solution quadrupolaire. En bas, $\tilde{\mu}_i \tilde{\nu}_i < 0$, et le point fixe issu de la solution quadrupolaire disparaît en premier. Les ronds représentent des points fixes stables, et les carrés des points fixes instables.

limite, éventuellement nulle. On utilisera comme exemple l'écoulement traversant, pour lequel $\tilde{\nu}_i = 0$, et $\tilde{\mu}_i \rightarrow 2$ pour $L \gg 1$ (voir équation (3.22)).

Lorsque l'on fait varier la taille du domaine, le coefficient ν_r s'annule et change de signe en $L = n + 1/2$ (il est négatif pour $L < n + 1/2$ et positif dans le cas contraire). La combinaison $\tilde{\mu}_i \tilde{\nu}_i \nu_r$ change donc également de signe en ce point. Autrement dit, on passe d'un scénario de codimension deux à l'autre de part et d'autre $L = n + 1/2$.

Par ailleurs, en divisant l'équation (3.42) par ν_r , on montre immédiatement que l'espace des paramètres tracé en coordonnées $(\epsilon/\nu_r, \mu_r/\nu_r)$ est indépendant de ν_r . Ainsi, si l'on écrit $L = n + 1/2 + \xi$, alors au premier ordre $\nu_r \sim \xi$, et l'espace des paramètres pour une valeur $\xi = \xi_1$ s'obtient directement à partir de celui pour $\xi = \xi_2$ (avec ξ_1 et ξ_2 de même signe) par homothétie de rapport ξ_1/ξ_2 .

On représente donc sur la figure 3.9 l'espace des paramètres en fonction de la taille du domaine, au voisinage immédiat d'une valeur demi-entière de celle-ci. Cette représentation correspond à une brisure de symétrie telle que $\tilde{\mu}_i \tilde{\nu}_i < 0$, le cas $\tilde{\mu}_i \tilde{\nu}_i > 0$ s'obtenant à partir de cette figure par symétrie par rapport au plan $L = n + 1/2$, puis en inversant les rôles des modes dipolaires et quadrupolaires. On constate que l'espace des paramètres se comprime en approchant $L = n + 1/2$, puis croît à nouveau, mais avec l'autre scénario de codimension 2.

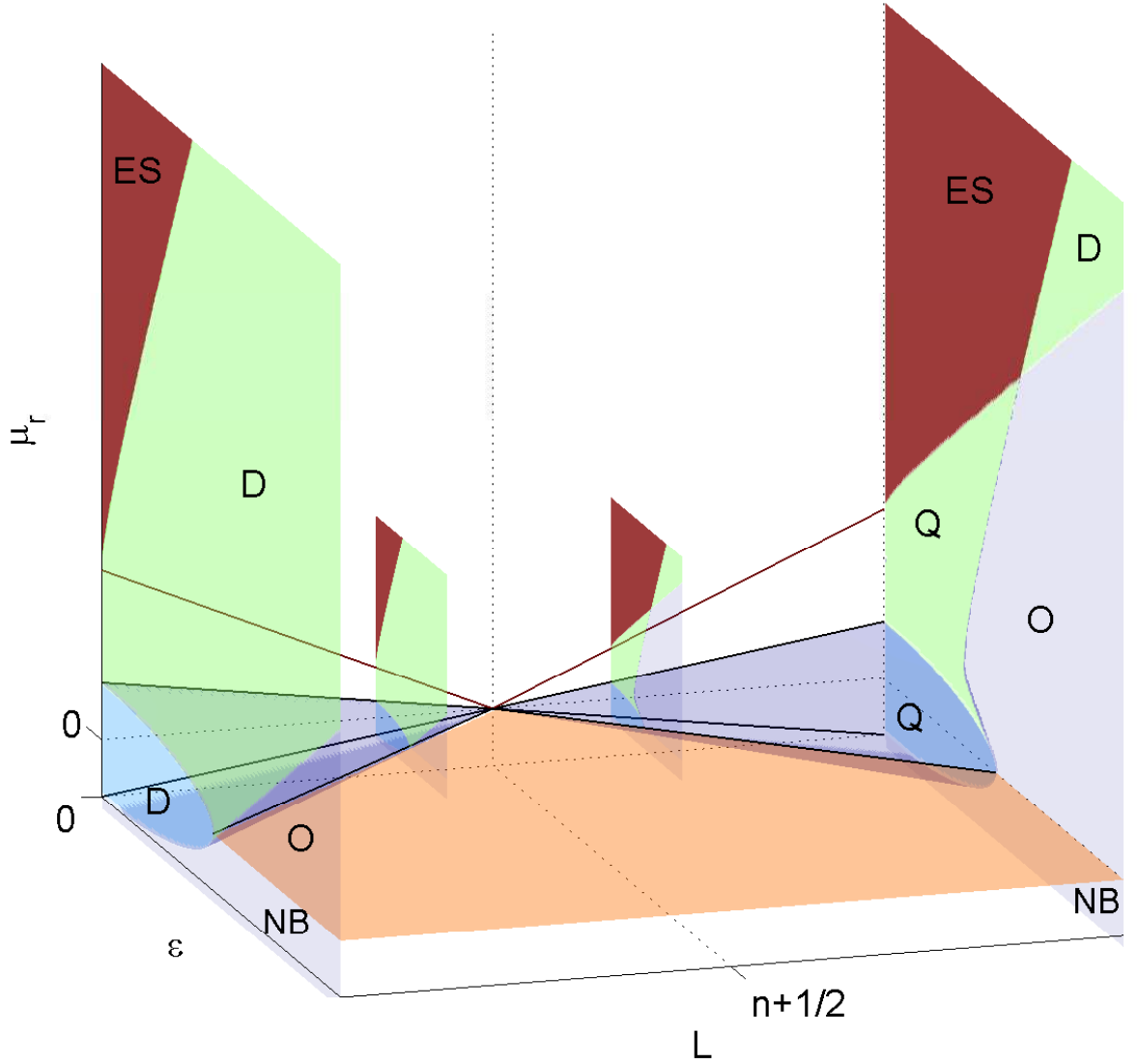


FIGURE 3.9 – Espace des paramètres au voisinage de $L = n + 1/2$, représenté dans le cas $\tilde{\mu}_i \tilde{\nu}_i < 0$. Sur les faces avant et arrière, des lettres désignent les différents états observés loin du point de codimension 2 : NB = non bifurqué, D = point fixe dipolaire stable, Q = point fixe quadrupolaire stable, O = oscillant, ES = stabilité vis-à-vis d'Eckhaus, c'est-à-dire bistabilité des points fixes dipolaire et quadrupolaire. Le cas $\tilde{\mu}_i \tilde{\nu}_i > 0$ s'obtient par symétrie plane par rapport au plan $L = n + 1/2$, puis en inversant les rôles de D et Q.

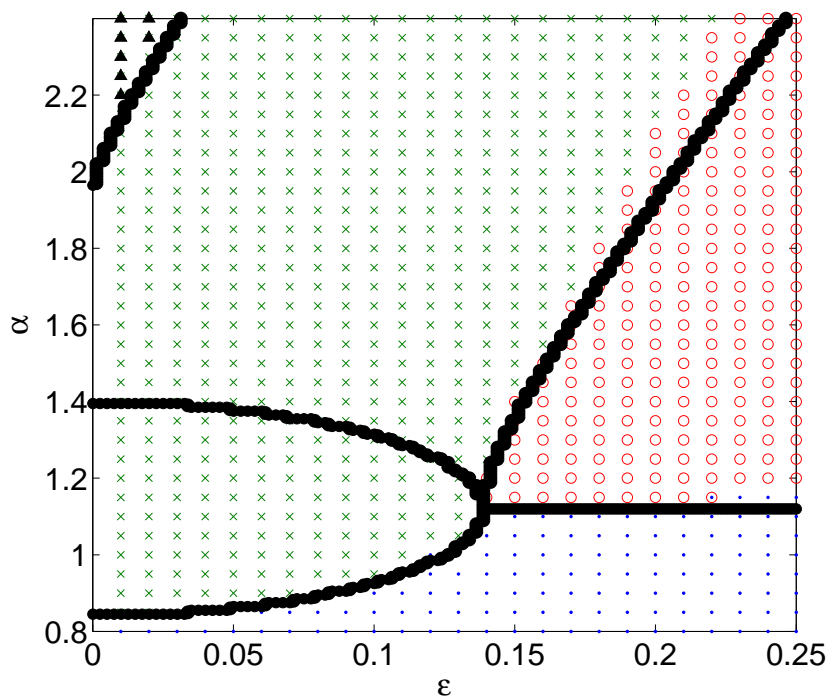


FIGURE 3.10 – Espace des paramètres de l'équation de Swift-Hohenberg non-linéaire, obtenu par résolution numérique. La brisure de symétrie est un écoulement traversant, et la taille du domaine est $L = 9.45$. Points bleus : état non bifurqué ; croix vertes : stationnaire ; ronds rouges : oscillant ; triangles noirs : quadrupôle stable par Eckhaus. Les lignes épaisses sont les limites théoriques calculées à partir de l'équation d'amplitude.

Nous avons également résolu numériquement l'équation de Swift-Hohenberg perturbée par un écoulement traversant, avec une nonlinéarité en $-\phi^3$. Nous avons fixé la taille du domaine à $L = 9.45$, c'est-à-dire une valeur à la fois grande, et proche d'un demi-entier. L'écoulement traversant a la particularité de vérifier $\tilde{v}_i = 0$, ce qui signifie que le terme en x^3 s'annule dans la forme normale de codimension 2. Dans ce cas particulier, on n'observe pas de bistabilité au voisinage du point de codimension 2, et la frontière stationnaire-oscillant part de ce point avec une tangente verticale.

Le diagramme des états obtenus est représenté sur la figure 3.10, et est en très bon accord avec le calcul théorique.

Divers espaces des paramètres ont également été calculés numériquement pour $L \in [9; 10]$, et sont représentés sur la figure 3.11. On constate bien que l'amplitude minimale de la brisure de symétrie nécessaire pour obtenir une propagation du motif s'annule en $L \simeq 9.5$. On constate de plus que le seuil en α nécessaire pour faire apparaître un motif propagatif dépend légèrement de ϵ . Cet effet est dû à des corrections à μ_r en ϵ^2 , qui ne sont donc pas incluses dans le calcul théorique, qui lui est effectué à l'ordre ϵ . Ces corrections sont négligeables pour les très grandes valeurs de L et pour les valeurs plus proches d'un demi-entier, pour lesquelles les valeurs de ϵ mises en jeu sont plus faibles.

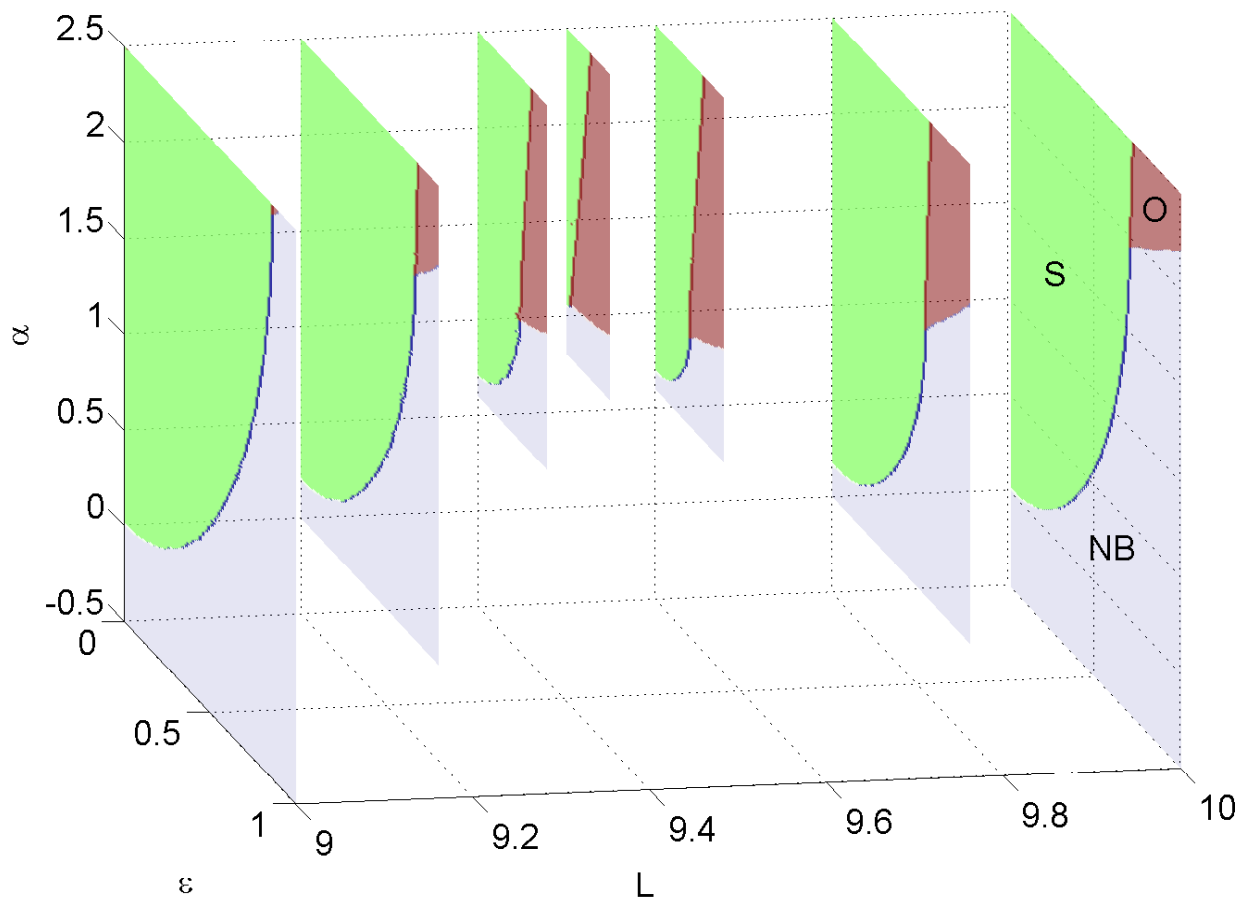


FIGURE 3.11 – Espace des paramètres tridimensionnel de l'équation de Swift-Hohenberg non-linéaire, obtenu par résolution numérique pour $L \in [9; 10]$. La brisure de symétrie est un écoulement traversant. Chaque couleur correspond à un état du système : NB = non bifurqué, S = stationnaire, O = oscillant.

3.4 Discussion

3.4.1 Comparaison à la bibliographie existante

Nous avons étudié l'effet de la taille finie du domaine sur l'instabilité de dérive d'un motif périodique quand on brise la symétrie discrète \mathcal{S} . L'effet de la brisure de symétrie est traité perturbativement à l'ordre linéaire, et a pour effet de coupler deux modes qui se transforment différemment sous l'effet de la symétrie. Le passage d'un motif stationnaire à un motif qui se propage est en ce sens très similaire au passage d'un champ magnétique stationnaire à un champ magnétique oscillant dans la dynamo VKS. Nous avons montré que dans la limite d'un domaine grand, les termes non-linéaires de l'équation de départ (Swift-Hohenberg) se traduisent tous par des nonlinéarités équivalentes dans l'équation d'amplitude. L'espace des états du système possède alors une forme qualitative qui dépend uniquement du signe de la combinaison $\tilde{\mu}_i \tilde{\nu}_i$: il y a donc seulement deux diagrammes possibles. Ces diagrammes ont été décrits en détail. Le passage d'un état stationnaire à un état propagatif du motif peut se faire par bifurcation noeud-col, ou par un scénario plus riche au voisinage d'un point de codimension deux. En particulier, nous avons démontré la possibilité d'une bistabilité entre motif stationnaire et propagatif pour certaines valeurs des paramètres. L'espace des états contient également à plus haut forçage une zone de bistabilité entre deux états stationnaires, que nous avons interprétée comme étant la zone de stabilité vis-à-vis de l'instabilité d'Eckhaus en géométrie finie.

Le fait que toute instabilité décrite par l'équation de Swift-Hohenberg conduise dans le cadre du présent calcul à un diagramme des états de la forme de celui de la figure 3.9, donne à cette étude un caractère quelque peu universel. Nous souhaitons donc comparer nos résultats à la bibliographie existante.

Un exemple simple de brisure de symétrie est étudiée par Rehberg et al. [27] : les auteurs réalisent expérimentalement la convection de Rayleigh-Bénard dans une cellule dont la hauteur varie linéairement en x près des bords $x = 0$ et $x = L$. Les rampes de hauteur présentes au niveau de ces deux bords ont des pentes différentes, ce qui est à l'origine d'une brisure de symétrie entre un côté et l'autre de la cellule. Lorsque l'on augmente le nombre de Rayleigh, on observe d'abord des rouleaux stationnaires, puis qui se propagent pour des valeurs plus élevées. Bien que l'amplitude de la brisure de symétrie semble fixée par la géométrie de la cellule, augmenter le nombre de Rayleigh revient donc à parcourir un chemin non trivial dans le plan (ϵ, μ_r) de la figure 3.5. Ce chemin intersecte la frontière stationnaire-oscillant, et l'expérience présente la phénoménologie de la bifurcation noeud-col, telle qu'elle a été observée dans l'expérience VKS. En effet, sur la figure 3.12 sont représentés deux diagrammes spatio-temporels : le premier est mesuré loin du seuil de la propagation, et la dérive se fait quasiment à vitesse constante, tandis que le second est effectué plus près du seuil de la bifurcation noeud-col, et le système s'attarde donc longtemps dans la région de l'espace des phases où viennent de disparaître les points fixes. Ceci se voit également sur la série temporelle de vitesse de dérive, qui montre que le système passe de longues périodes près des anciens points fixes. Enfin, la fréquence de dérive croît en racine de l'écart au seuil, en accord avec la phénoménologie de la bifurcation noeud-col.

Un autre exemple de brisure de symétrie en convection est étudié numériquement dans Tuckerman et al. [28] : la géométrie est cylindrique, et le motif de convection est axisymétrique au seuil. La brisure de symétrie vient de la courbure du système, qui privilégie un sens de propagation dans la direction radiale. Cette brisure de symétrie est grande, mais la phénoménologie observée peut toujours être décrite à l'aide des résultats précédents si l'on autorise une trajectoire

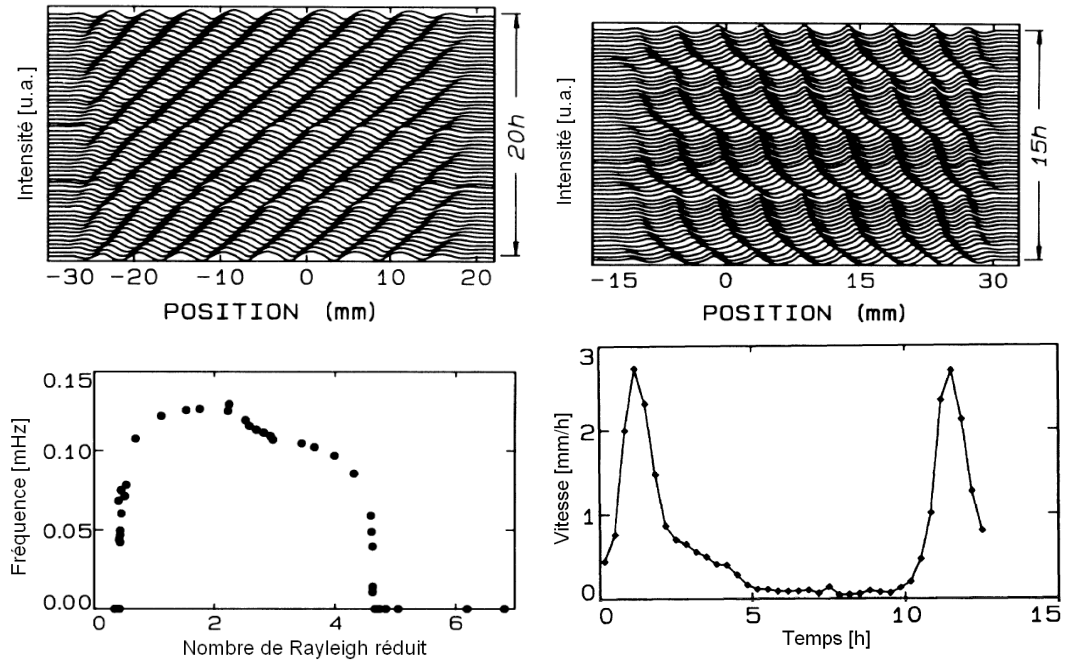


FIGURE 3.12 – En haut : Diagramme spatio-temporel montrant la convection loin (à gauche) et près (à droite) du seuil de dérive. Les nombres de Rayleigh réduits valent respectivement 0.72 et 0.50. En bas à gauche : fréquence de dérive en fonction du nombre de Rayleigh réduit. En bas à droite : série temporelle de la vitesse de dérive, pour un nombre de Rayleigh réduit de 0.42.

courbe dans le plan (ϵ, μ_r) . Nous présentons donc sur la figure 3.13 la phénoménologie observée par les auteurs : dans le cas de parois conductrices, cinq rouleaux stationnaires croissent, avant de se propager dans la direction radiale. Lors de cette propagation, le système passe temporairement par un état à quatre rouleaux. Cet état est le quadrupôle de notre étude. Les auteurs décrivent en détail la bifurcation noeud-col qui conduit à cette propagation. Si maintenant les parois sont isolantes, on n'observe plus de propagation, mais le passage de cinq rouleaux à quatre rouleaux stationnaires quand le nombre de Rayleigh augmente. Cette transition est hystérétique, et correspond à l'instabilité d'Eckhaus en présence d'une brisure de symétrie. Nous reprenons donc la figure 3.5 sur laquelle nous traçons deux chemins correspondant aux observations en parois conductrices et isolantes.

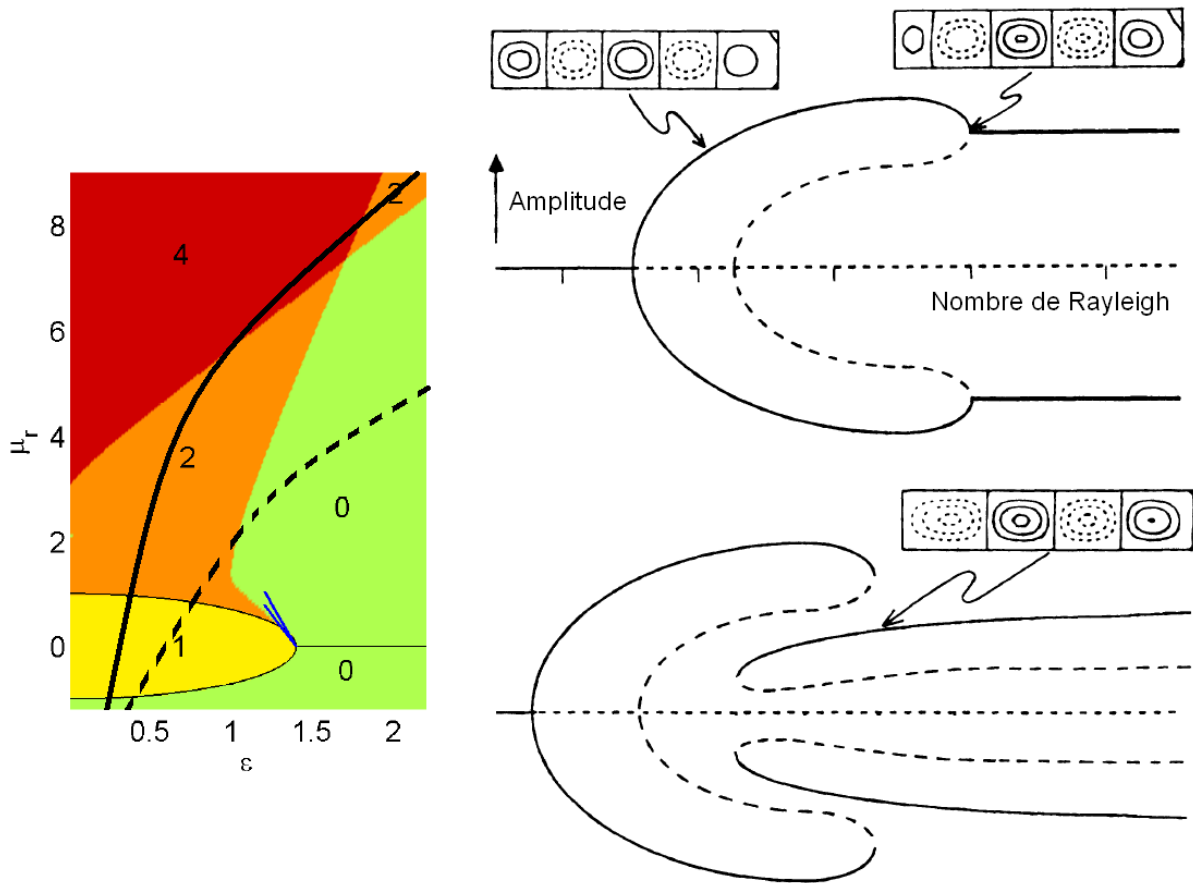


FIGURE 3.13 – A droite : diagrammes de bifurcation obtenus en augmentant le nombre de Rayleigh, en présence de parois conductrices (en haut) et isolantes (en bas). Les lignes pleines sont des solutions stables, les lignes tiretées des solutions instables, et la ligne épaisse la solution oscillante (données issues de [28]). A gauche : trajectoires dans la figure 3.5 permettant de retrouver la phénoménologie observée (ligne tiretée : parois conductrices. ligne pleine : parois isolantes).

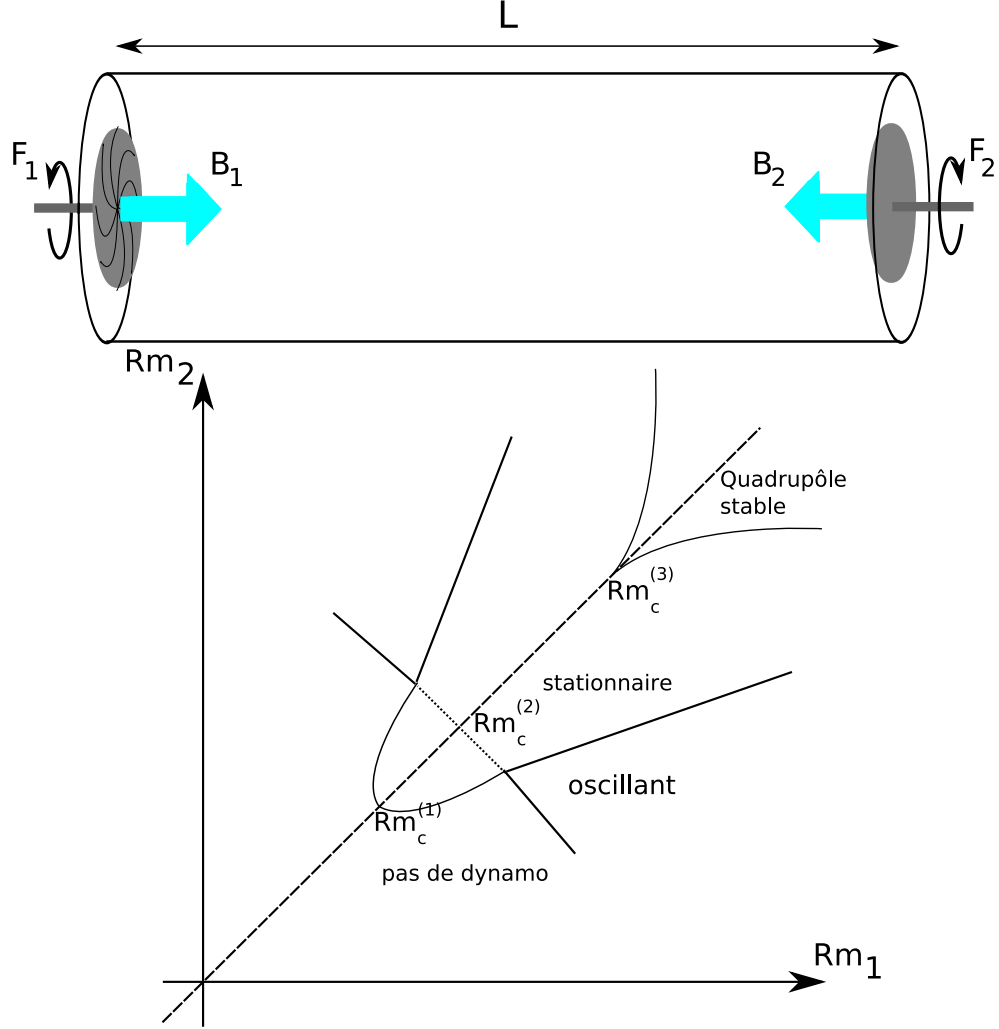


FIGURE 3.14 – En haut : deux dynamos identiques, très éloignées l’une de l’autre et ayant des fréquences de rotation proches sont couplées uniquement à l’ordre linéaire. Avec les conventions choisies, B_1 et B_2 ont ici le même signe, ce qui forme une configuration quadrupolaire. En bas : si l’expérience VKS entre dans le cadre de cette approximation, une zone de stabilité du quadrupôle est prédite pour $Rm > Rm_c^{(2)} + 2(Rm_c^{(2)} - Rm_c^{(1)})$ en contra-rotation exacte (voir texte).

3.4.2 Application aux dynamos faiblement couplées

La dynamique non-linéaire du motif a pu être étudiée en détail dans notre analyse, car tous les termes non-linéaires de l’équation de départ se traduisent par un seul terme non-linéaire dans l’équation d’amplitude. Une situation similaire se produit lors de l’étude de deux dynamos très éloignées l’une de l’autre. Considérons par exemple que la dynamo VKS soit formée de deux disques coaxiaux que l’on rapproche depuis l’infini. On note L la distance qui sépare ces deux disques. On suppose que les deux disques tournent à la même fréquence, et qu’ils constituent donc deux dynamos identiques, qui engendrent localement un dipôle dans la direction axiale. Notons $B_1(t)$ l’amplitude du champ magnétique d’une dynamo et $B_2(t)$ celle de l’autre. Au voisinage du seuil commun des deux dynamos, ces amplitudes vérifient des équations du type :

$$\dot{B}_1 = \mu B_1 + \alpha B_2 - B_1^3 \quad (3.59)$$

$$\dot{B}_2 = \mu B_2 + \alpha B_1 - B_2^3 \quad (3.60)$$

où le coefficient α est le couplage des deux dynamos. Il est nul quand les deux dynamos sont infiniment éloignées, et est supposé $\mathcal{O}(L^{-1})$ à L grand. Au voisinage du seuil, B_1^2 et B_2^2 sont de l'ordre de μ . Supposons $\mu = \mathcal{O}(L^{-1})$: les couplages linéaires entre les deux dynamos doivent être conservés, mais les couplages non-linéaires peuvent être négligés : ils font intervenir un coefficient $\beta = \mathcal{O}(L^{-1})$, et sont donc d'ordre $\beta B_1^2 B_2 \sim \beta \mu B_2 = \mathcal{O}(L^{-1}) \mu B_2 \ll \mu B_1$. Considérons maintenant l'ensemble formé par les deux dynamos : si les deux champs magnétiques axiaux sont dirigés dans le même sens, la dynamo est dipolaire, sinon elle est quadrupolaire. On définit donc les amplitudes du dipôle et du quadrupôle par $d(t) = B_1(t) - B_2(t)$ et $q(t) = B_1(t) + B_2(t)$. La somme et la différence des équations précédentes conduit à :

$$\dot{d} = (\mu - \alpha)d - \frac{1}{4}(d^3 + 3q^2d) \quad (3.61)$$

$$\dot{q} = (\mu + \alpha)q - \frac{1}{4}(q^3 + 3d^2q) \quad (3.62)$$

En définissant l'amplitude complexe $A(t) = d(t) + iq(t)$, on réécrit cette équation sous la forme :

$$\dot{A} = \mu A - \alpha \bar{A} - \frac{1}{8}(3A^2 \bar{A} - \bar{A}^3) \quad (3.63)$$

De nouveau, on a réussi à obtenir la forme précise des termes non-linéaires de l'équation d'amplitude, alors que l'on pouvait a priori mettre les quatres termes A^3 , $A^2 \bar{A}$, $\bar{A}^2 A$, et \bar{A}^3 dans cette équation. Ce type de simplification s'obtient quand une symétrie du problème de départ est faiblement brisée :

- Dans le cas d'un motif périodique dans un grand domaine, c'est l'invariance par translation selon x qui n'est que faiblement brisée, puisqu'elle n'est pas brisée du tout si le domaine est infini. La taille du domaine sélectionne alors les deux modes les plus instables, et le coefficient de couplage linéaire entre ces deux modes. Les termes non-linéaires eux peuvent être obtenus par une analyse dans le cas infini, et ne sont pas affectés à l'ordre dominant par la taille finie du domaine.
- Deux dynamos très loin l'une de l'autre interagissent faiblement, si bien que le couplage se ressent uniquement sur les termes linéaires de l'équation d'amplitude, tandis que les termes non-linéaires peuvent être calculés à l'ordre dominant en supposant que les dynamos sont infiniment éloignées, et donc non couplées.

On a supposé que les deux dynamos sont identiques et tournent à la même fréquence, si bien qu'une rotation d'angle π autour d'un vecteur radial dans le plan central entre les deux dynamos est symétrie du problème. Si maintenant on brise cette symétrie en faisant tourner un disque plus rapidement que l'autre, on va ajouter une partie imaginaire aux coefficients devant A et \bar{A} de l'équation (3.63), qui sera proportionnelle à l'amplitude de la brisure de symétrie. On obtient alors un espace des paramètres très similaire à celui représenté pour un motif périodique sur la figure 3.5. Une différence principale est que la stabilité du quadrupôle vis-à-vis de l'instabilité d'Eckhaus apparaît pour $\mu_r = 2\nu_r = 2\alpha$ (au lieu de $\mu_r = 3\nu_r$ pour un motif périodique). Si la dynamo VKS peut être décrite par ce modèle de dynamos faiblement couplées, on obtient alors la prédiction suivante : notons $Rm_c^{(1)}$ le seuil de la dynamo en contra-rotation exacte, et $Rm_c^{(2)}$ la valeur de $(Rm_1 + Rm_2)/2$ au point de codimension 2. Définissons alors $Rm_c^{(3)} = Rm_c^{(2)} + 2(Rm_c^{(2)} - Rm_c^{(1)})$. Pour $Rm < Rm_c^{(3)}$, le quadrupôle est instable au profit du dipôle, alors que pour $Rm > Rm_c^{(3)}$ le quadrupôle et le dipôle sont tous les deux stables. On prédit donc une zone de stabilité du quadrupôle en contra-rotation exacte très rapide, représentée schématiquement sur la figure 3.14. Cependant, les deux disques de VKS sont relativement proches, et il n'est pas du tout sûr que l'expérience puisse être décrite comme deux dynamos faiblement couplées. En particulier, il est difficile de reproduire l'espace des paramètres de l'expérience VKS avec ce modèle de dynamos

éloignées, et ce même au voisinage de la contra-rotation exacte. Ceci est lié au fait qu'un champ magnétique apparaissant par bifurcation de Hopf supercritique n'a jamais été mis en évidence clairement dans l'expérience VKS. De plus, à forte brisure de symétrie les dynamos oscillantes redeviennent stationnaires, ce qui n'est pas capturé par le schéma 3.14.

3.A Résolution numérique de l'équation de Swift-Hohenberg

Afin de résoudre numériquement l'équation de Swift-Hohenberg, on discrétise la fonction ϕ , qui devient un vecteur $\Phi = (\phi_1, \dots, \phi_N)$, avec $\phi_p = \phi(x = pL/(N+1))$. On exprime alors approximativement les dérivées par des différences finies. En tenant compte des conditions aux limites pour calculer les coefficients aux bords, les opérateurs de dérivées première, seconde et quatrième s'écrivent alors :

$$D_X = \frac{N+1}{2L} \left\{ \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & & \\ 0 & \dots & & -1 & 0 \end{array} \right\} \quad (3.64)$$

$$D_{XX} = \frac{(N+1)^2}{L^2} \left\{ \begin{array}{ccccc} -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & & \\ 0 & \dots & & 1 & -2 \end{array} \right\} \quad (3.65)$$

$$D_{XXXX} = D_{XX}^2 \quad (3.66)$$

La partie linéaire de l'équation de Swift-Hohenberg s'écrit $M\Phi$, avec $M = \alpha Id - [D_{XX} + \pi^2 Id]^2 + \epsilon P$, où Id est la matrice identité, et P est la matrice de l'opérateur de perturbation qui brise la symétrie \mathcal{S} . Dans le cas d'un écoulement traversant, cette matrice est simplement D_X , tandis que dans l'exemple explicite de perturbation localisée au bord, elle s'écrit :

$$P = \frac{N+1}{L} \left[\left\{ \begin{array}{ccccc} 1 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -1 \end{array} \right\} + \frac{a}{L} \left(X - \frac{L}{2} \right) \left\{ \begin{array}{ccccc} 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{array} \right\} \right] \quad (3.67)$$

où la seconde matrice agit à gauche sur le vecteur $(X - \frac{L}{2})$, défini par $(X - \frac{L}{2})_p = \frac{pL}{N+1} - L/2$.

Dans la partie linéaire de l'étude, on calcule les valeurs propres de M à l'aide du logiciel Matlab, tandis que dans la partie non-linéaire on discrétise le temps, on note $\Phi^{(t)}$ le vecteur Φ à l'instant t et dt le pas de temps, et on écrit :

$$\Phi^{(t+1)} = [Id - Mdt]^{-1} \{ \Phi^{(t)} - (\Phi^{(t)})^3 \} \quad (3.68)$$

3.B Couplage par les bords du domaine

Certaines brisures de symétrie peuvent être introduites au niveau des bords du domaine : considérons de nouveau la convection de Rayleigh-Bénard en géométrie finie, et imaginons maintenant que la paroi située en $x = 0$ soit très légèrement inclinée par rapport à la verticale. Elle fait alors un angle $\epsilon \ll 1$ avec la verticale. Cette modification du système brise évidemment la

symétrie \mathcal{S} , puisque les deux parois situées en $x = 0$ et $x = L$ ne sont plus identiques.

Un autre exemple est issu de l'instabilité de Faraday. Cette instabilité paramétrique apparaît quand un fluide est vibré verticalement au-dessus d'une amplitude critique. A une dimension, il apparaît à la surface du fluide une onde stationnaire. En présence de parois verticales aux bords du domaine, il existe également des ondes de ménisque au voisinage des deux parois. Ces deux ondes de ménisque interagissent faiblement avec le mode de Faraday. Néanmoins, en changeant la structure d'une des deux parois - par exemple en modifiant l'angle de contact au niveau de cette paroi - on modifie une des deux ondes de ménisque. On brise donc la symétrie \mathcal{S} , ce qui a pour conséquence de modifier la structure et éventuellement la dynamique du mode de Faraday.

3.B.1 Structure de l'opérateur de perturbation

Ces brisures de symétrie étant localisées aux bords du domaine, on suppose que l'opérateur de perturbation dépend essentiellement de ϕ et de ses dérivées successives au voisinage des bords du domaine : un mode entièrement localisé près de $x = L$ et dont la valeur et toutes les dérivées sont quasi-nulles près de $x = 0$ sera très peu sensible à une faible modification du système en $x = 0$. On supposera donc que la modification du système est suffisamment localisée aux bords du domaine pour que l'opérateur de perturbation ne fasse intervenir que les valeurs de ϕ et de ses dérivées successives en $x = 0$ et en $x = L$. La forme d'un tel opérateur est donc :

$$\mathcal{L}(\phi) = \sum_{p=0}^{+\infty} \left[f_p(x) \left(\frac{\partial^p \phi}{\partial x^p} \Big|_{x=0} + \frac{\partial^p \phi}{\partial x^p} \Big|_{x=L} \right) + g_p(x) \left(\frac{\partial^p \phi}{\partial x^p} \Big|_{x=0} - \frac{\partial^p \phi}{\partial x^p} \Big|_{x=L} \right) \right] \quad (3.69)$$

où les fonctions $(f_p)_{p \in \mathcal{N}}$ sont des fonctions impaires de $x - L/2$, et les fonctions $(g_p)_{p \in \mathcal{N}}$ sont des fonctions paires de $x - L/2$, afin que \mathcal{L} soit bien un opérateur antisymétrique vis-à-vis de \mathcal{S} . On peut déjà remarquer que les termes correspondant à $p = 0$ et $p = 2$ sont tous nuls du fait des conditions aux limites. De plus, nous utilisons une approche perturbative dans laquelle les modes propres du problème non perturbé sont des sinus. On en déduit que toutes les dérivées paires de ces modes propres s'annulent aux bords du domaine. On en déduit de plus que toutes les dérivées impaires de chacun de ces modes propres sont reliées par un simple coefficient de proportionnalité. Dans le cadre de notre étude, un opérateur de la forme (3.69) sera donc toujours équivalent à un opérateur qui prend la forme plus simple :

$$\mathcal{L}(\phi) = f(x)(\partial_x(\phi)|_{x=0} + \partial_x(\phi)|_{x=L}) + g(x)(\partial_x(\phi)|_{x=0} - \partial_x(\phi)|_{x=L}) \quad (3.70)$$

où $f(x)$ est une fonction paire de $x - L/2$ dépendant de $(f_p)_{p \in 2\mathcal{N}+1}$, et $g(x)$ est une fonction impaire de $x - L/2$ dépendant de $(g_p)_{p \in 2\mathcal{N}+1}$.

3.B.2 Coefficients de couplage

Les coefficients de couplage correspondant à l'opérateur de perturbation linéaire (3.70) prennent une forme différente suivant la parité de n .

Pour n pair, ils s'écrivent :

$$\gamma_{qd} = \frac{4n\pi}{L^2} \int_{x=0}^{x=L} f(x) \sin((n+1)\pi x/L) dx \quad (3.71)$$

$$\gamma_{dq} = \frac{4(n+1)\pi}{L^2} \int_{x=0}^{x=L} g(x) \sin(n\pi x/L) dx \quad (3.72)$$

$$\mu_i = \epsilon \frac{2\pi}{L^2} \int_{x=0}^{x=L} n f(x) \sin((n+1)\pi x/L) - (n+1) g(x) \sin(n\pi x/L) dx \quad (3.73)$$

$$\nu_i = \epsilon \frac{2\pi}{L^2} \int_{x=0}^{x=L} n f(x) \sin((n+1)\pi x/L) + (n+1) g(x) \sin(n\pi x/L) dx \quad (3.74)$$

tandis que pour n impair :

$$\gamma_{qd} = \frac{4n\pi}{L^2} \int_{x=0}^{x=L} g(x) \sin((n+1)\pi x/L) dx \quad (3.75)$$

$$\gamma_{dq} = \frac{4(n+1)\pi}{L^2} \int_{x=0}^{x=L} f(x) \sin(n\pi x/L) dx \quad (3.76)$$

$$\mu_i = \epsilon \frac{2\pi}{L^2} \int_{x=0}^{x=L} n g(x) \sin((n+1)\pi x/L) - (n+1) f(x) \sin(n\pi x/L) dx \quad (3.77)$$

$$\nu_i = \epsilon \frac{2\pi}{L^2} \int_{x=0}^{x=L} n g(x) \sin((n+1)\pi x/L) + (n+1) f(x) \sin(n\pi x/L) dx \quad (3.78)$$

On peut d'ores et déjà tirer quelques conclusions sur la dynamique observable :

- On pourra observer une propagation du motif si $|\mu_i| > |\nu_i|$. D'après les équations (3.17) et (3.19), cela se produira si γ_{qd} et γ_{dq} sont de signes opposés. Dans le cas de la perturbation qui nous intéresse ici, il "suffit" donc de changer le signe de la fonction f (ou de g) pour passer d'une perturbation qui entraîne une propagation du motif à une perturbation qui produit une localisation du motif uniquement. Autrement dit, une perturbation arbitraire localisée aux bords - et suffisamment intense - a "une chance sur deux" d'entraîner une dérive du motif, suivant les signes relatifs de f et g .
- En se rappelant que n est la partie entière de L , on constate que les coefficients de couplage μ_i et ν_i sont d'ordre $\mathcal{O}(\epsilon/L)$ pour la perturbation étudiée ici, alors qu'ils étaient d'ordre $\mathcal{O}(\epsilon)$ dans le cas d'un écoulement horizontal traversant. Si on mesure la brisure de symétrie en termes de ϵ dans les deux cas, il faudra donc une brisure de symétrie beaucoup plus forte dans le cas présent pour engendrer une dérive du motif ($\epsilon_c = \mathcal{O}(1/L)$ dans le cas présent, contre $\mathcal{O}(1/L^2)$ pour un écoulement horizontal traversant).

3.B.3 Etude d'un cas particulier : seuil de dérive

Concentrons-nous maintenant sur un exemple simple, à savoir $f(x) = 1$, et $g(x) = \frac{a}{L}(x-L/2)$, où a est un paramètre ajustable. Les coefficients de couplage s'écrivent alors :

	n pair	n impair
γ_{qd}	$\frac{8n}{(n+1)L}$	$-\frac{4an}{(n+1)L}$
γ_{dq}	$-\frac{4a(n+1)}{nL}$	$\frac{8(n+1)}{nL}$
μ_i	$\epsilon \left(\frac{4n}{(n+1)L} + \frac{2a(n+1)}{nL} \right)$	$\epsilon \left(-\frac{4(n+1)}{nL} - \frac{2an}{(n+1)L} \right)$
ν_i	$\epsilon \left(\frac{4n}{(n+1)L} - \frac{2a(n+1)}{nL} \right)$	$\epsilon \left(\frac{4(n+1)}{nL} - \frac{2an}{(n+1)L} \right)$

(3.79)

On constate donc que les signes relatifs de γ_{qd} et γ_{dq} sont pilotés par le signe de a . Ainsi, on pourra obtenir une dérive du motif uniquement pour $a > 0$.

Afin de calculer le seuil de propagation du motif, notons $\nu_i = \epsilon \tilde{\nu}_i$ et $\mu_i = \epsilon \tilde{\mu}_i$, et étudions la stabilité linéaire du point fixe $A = 0$ dans l'équation (3.15). Le système possède deux valeurs propres qui s'écrivent :

$$s_{1,2} = \begin{cases} \mu_r \pm \sqrt{\nu_r^2 + \epsilon^2(\tilde{\nu}_i^2 - \tilde{\mu}_i^2)} & \text{si } |\epsilon| < \epsilon_c \equiv \frac{|\nu_r|}{\sqrt{\tilde{\mu}_i^2 - \tilde{\nu}_i^2}} \\ \mu_r \pm i\sqrt{-\nu_r^2 - \epsilon^2(\tilde{\nu}_i^2 - \tilde{\mu}_i^2)} & \text{si } |\epsilon| > \epsilon_c \end{cases} \quad (3.80)$$

Le point fixe $A = 0$ subit donc une instabilité stationnaire si $|\epsilon| < \epsilon_c$ et $\mu_r > -\sqrt{\nu_r^2 + \epsilon^2(\tilde{\nu}_i^2 - \tilde{\mu}_i^2)}$, tandis qu'il subit une instabilité oscillante si $|\epsilon| > \epsilon_c$ et $\mu_r > 0$. Le seuil de propagation du motif est donc $|\epsilon| = \epsilon_c$.

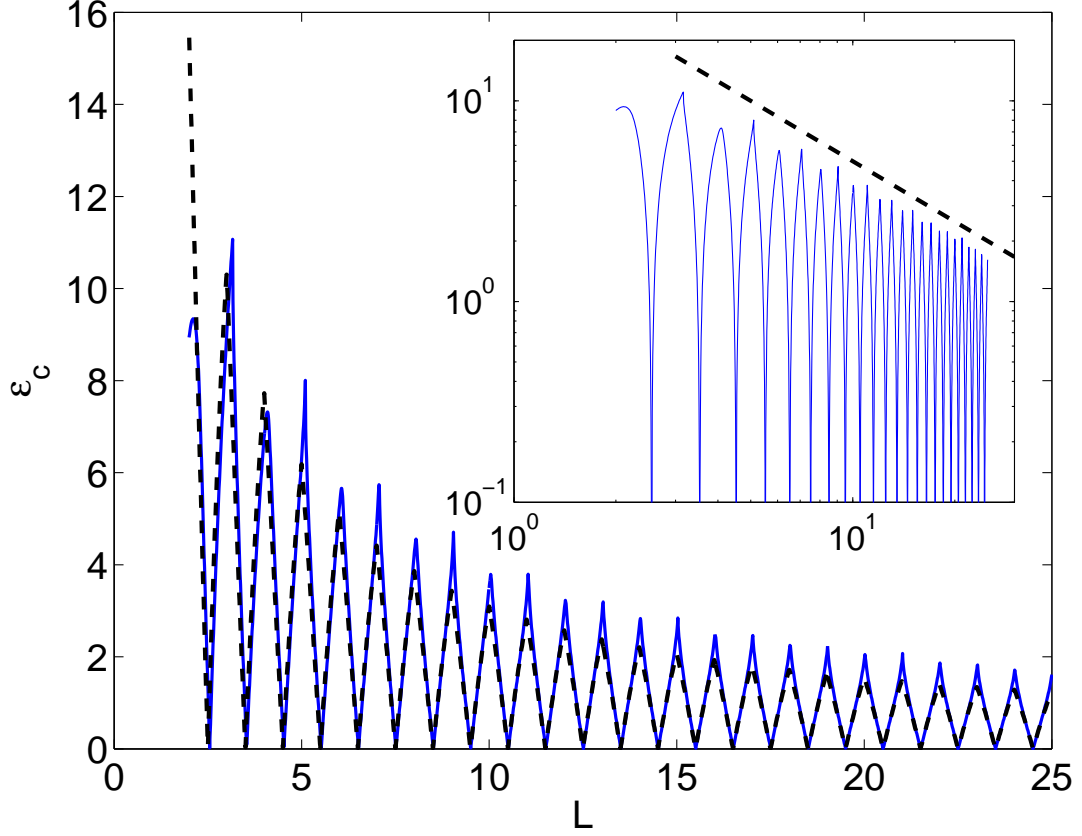


FIGURE 3.15 – Amplitude critique de la brisure de symétrie pour obtenir une propagation du motif. La courbe pleine est la solution numérique, et la ligne tiretée correspond au résultat théorique (3.83). L’insert est une représentation log-log du résultat numérique. La ligne tiretée est une loi de puissance d’exposant -1 .

En introduisant dans cette dernière formule la valeur de ν_r et les expressions issues du tableau (3.79), on obtient :

$$\epsilon_c = \frac{\pi^4 L}{8\sqrt{2a}} \left| \left(1 - \frac{n^2}{L^2}\right)^2 - \left(1 - \frac{(n+1)^2}{L^2}\right)^2 \right| \quad (3.81)$$

Cette expression est valable quelle que soit la parité de n . On observe de nouveau que, pour $a < 0$, cette expression n’est pas définie et il ne peut pas y avoir de propagation du motif.

3.B.4 Interpolation

Si l'on remplace n par la partie entière de L , l'expression précédente pour ϵ_c présente des discontinuités pour les valeurs entières de L . De plus, cette expression approchée de ϵ_c n'est justement pas valable pour ces valeurs de L . Comme précédemment, on souhaite donc réaliser une interpolation du résultat valable près de $L = n/2$ à toutes valeurs de L . Cette interpolation est plus compliquée pour cette perturbation que pour l'écoulement traversant, du fait du traitement différent de n pair et n impair. Selon la parité de n , μ_i change de signe. Ainsi, $\tilde{\mu}_i$ devrait s'annuler, et ϵ_c ne serait alors plus défini. Une solution consiste à réaliser deux interpolations : une pour les n pairs, qui s'annule tous les $L = 2p + 1/2$, et une pour les n impairs, qui s'annule pour tous les $L = 2p + 3/2$. Le ϵ_c^{interp} sera alors le minimum en valeur absolue des deux courbes obtenues. Cela revient à dire qu'au voisinage, de $L = n$, on garde celui des couplages avec $n - 1$ et $n + 1$ qui conduit le premier à une propagation du motif.

En posant $n = L + 1/2 + \xi$, avec $\xi \ll 1$ et $L \gg 1$, on obtient l'expression approchée :

$$\epsilon_c \simeq \frac{\pi^4(n + 1/2)}{\sqrt{2an^2}}|\xi| \simeq \frac{\pi^4}{\sqrt{2an}}|\xi| \quad (3.82)$$

L'interpolation de cette solution à toute valeur de L , selon le procédé décrit ci-dessus, est alors :

$$\epsilon_c^{interp} = \pm \sqrt{\frac{2}{a}} \frac{\pi^3}{L} \min \left\{ \left| \cos \left(\frac{\pi}{2}(L - 1/2) \right) \right| ; \left| \sin \left(\frac{\pi}{2}(L - 1/2) \right) \right| \right\} \quad (3.83)$$

Cette expression analytique de l'amplitude critique de la brisure de symétrie est comparée à la valeur calculée numériquement sur la figure 3.15. L'accord est relativement bon.

3.B.5 Sens de propagation

On remarque dans le tableau (3.79) que le signe de μ_i dépend de la parité de n (on rappelle que $a > 0$ pour observer une propagation du motif). Ainsi, si l'on maintient constante la valeur de ϵ et que l'on modifie la taille du système, le sens de dérive change entre $L = L_0$ et $L = L_0 + 1$:

- Pour $2p < L < 2p + 1$, où p est un entier naturel, le motif se propage dans la direction $-\epsilon \vec{e}_x$.
- Pour $2p - 1 < L < 2p$, le motif se propage dans la direction $\epsilon \vec{e}_x$.

3.C Réduction à la forme normale de codimension 2

Afin de mettre l'équation (3.42) sous forme normale au voisinage du point de codimension 2, partons du système dynamique intermédiaire :

$$\dot{x} = Ky + NL_1(x, y) \quad (3.84)$$

$$\dot{y} = \mu_1 x + \mu_2 y + NL_2(x, y) \quad (3.85)$$

Ce système dynamique possède une partie linéaire proche de celle de la forme normale de codimension 2, et des termes non-linéaires $NL_1(x, y)$ et $NL_2(x, y)$ que l'on ne précisera qu'ultérieurement. Posons $B = x + iy$, et réécrivons ce système sous la forme :

$$\dot{B} = \left[\frac{\mu_2}{2} + \frac{i}{2}(\mu_1 - K) \right] B + \left[-\frac{\mu_2}{2} + \frac{i}{2}(\mu_1 + K) \right] \bar{B} + NL(B) \quad (3.86)$$

où $NL(B) = NL_1 + iNL_2$. Afin d'obtenir la partie linéaire de l'équation (3.42), posons tout d'abord :

$$-\frac{\mu_2}{2} + \frac{i}{2}(\mu_1 + K) = (\nu_r + i\nu_i)e^{i\theta}, \quad (3.87)$$

ce qui impose une première contrainte :

$$2|\nu| = \sqrt{(\mu_1 + K)^2 + \mu_2^2}, \quad (3.88)$$

et introduisons un nouveau changement de variable $B(t) = C(t)e^{i\theta/2}$:

$$\dot{C} = \left[\frac{\mu_2}{2} + \frac{i}{2}(\mu_1 - K) \right] C + [\nu_r + i\nu_i]\bar{C} + NL(Ce^{i\theta/2})e^{-i\theta/2} \quad (3.89)$$

Pour que cette équation soit identique à (3.42), il suffit alors de choisir μ_1 et μ_2 tels que :

$$\mu_r = \frac{\mu_2}{2} \quad (3.90)$$

$$\mu_i = \frac{\mu_1 - K}{2} \quad (3.91)$$

et d'imposer :

$$NL(Ce^{i\theta/2})e^{-i\theta/2} = \frac{-3}{16} (5C^2\bar{C} - \bar{C}^3) \quad (3.92)$$

ce qui s'écrit en revenant à la variable B :

$$NL(B) = \frac{3}{16} (-5B^2\bar{B} + e^{2i\theta}\bar{B}^3) \quad (3.93)$$

Maintenant que l'on connaît la fonction $NL_1 + iNL_2$, on revient au système de départ en x et y , et on réalise le changement de variable $t \rightarrow Kt$, pour obtenir :

$$\dot{x} = y + \frac{3}{16K} [-5(x^3 + y^2x) + \cos(2\theta)(x^3 - 3xy^2) - \sin(2\theta)(y^3 - 3x^2y)] \quad (3.94)$$

$$\dot{y} = \frac{\mu_1}{K}x + \frac{\mu_2}{K}y + \frac{3}{16K} [-5(x^2y + y^3) + \cos(2\theta)(y^3 - 3x^2y) + \sin(2\theta)(x^3 - 3xy^2)] \quad (3.95)$$

Le passage à la forme normale consiste à effectuer un changement de variables proche de l'identité. On définit les variables X et Y par :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \mathcal{P} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \quad (3.96)$$

où le dernier terme est un vecteur contenant des monômes de degré 3 en X et Y . On note le système au point de codimension 2 ($\mu_1 = \mu_2 = 0$) sous la forme :

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \mathcal{L} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \mathcal{N} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (3.97)$$

où \mathcal{L} est la partie linéaire du système et \mathcal{N} la partie non-linéaire (d'ordre 3). En notant \mathcal{D} la différentiation d'un opérateur, et en gardant les termes en X et Y jusqu'à l'ordre 3 seulement, l'évolution de X et Y est régie par :

$$\begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \end{pmatrix} = \mathcal{L} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + [(\mathcal{D}\mathcal{L})\mathcal{P} - (\mathcal{D}\mathcal{P})\mathcal{L} + \mathcal{N}] \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \quad (3.98)$$

$$\text{où } \mathcal{L} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & Y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \mathcal{D}\mathcal{L} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le terme entre crochets est le nouveau terme non linéaire. Par un choix judicieux de \mathcal{P} , la partie en $(\mathcal{DL})\mathcal{P} - (\mathcal{DP})\mathcal{L}$ permet d'annuler une grande partie des monômes d'ordre 3 de \mathcal{N} . Définissons l'application linéaire ϕ qui à un monôme de degré 3 associe le monôme $(\mathcal{DL})\mathcal{P} - (\mathcal{DP})\mathcal{L}$. Calculons l'image d'une base par cette application linéaire :

\mathcal{P}	X^3 0	X^2Y 0	XY^2 0	Y^3 0	0 X^3	0 X^2Y	0 XY^2	0 Y^3
$\phi(\mathcal{P})$	$-3X^2Y$ 0	$-2XY^2$ 0	$-Y^3$ 0	0 0	X^3 $-3X^2Y$	X^2Y $2XY^2$	XY^2 $-Y^3$	Y^3 $-3Y^3$

(3.99)

L'image de ϕ est donc de dimension 6, et ce dans un espace de dimension 8. Il y a donc 2 types de monômes de \mathcal{N} que l'on ne pourra pas éliminer par changement de variables. En particulier, on voit qu'il n'est pas possible de créer par ϕ du X^3 en bas. De plus, on peut supprimer un terme en aX^3 dans l'équation de \dot{X} , mais au prix d'ajouter un terme $3aX^2Y$ dans l'équation pour \dot{Y} . A l'issue du changement de variables, et en notant maintenant en minuscules les nouvelles variables, le système est grandement simplifié :

$$\dot{x} = y \quad (3.100)$$

$$\dot{y} = \frac{\mu_1}{K}x + \frac{\mu_2}{K}y - \frac{15}{4K}x^2y + \frac{3\sin(2\theta)}{16K}x^3 \quad (3.101)$$

Calculons les coefficients μ_1 , μ_2 , et $\sin(2\theta)$: en reprenant la formule (3.88), on peut écrire $K = 2|\nu| - \mu_1 + \mathcal{O}(\mu_2^2)$. Les formules (3.90) et (3.91) conduisent alors à :

$$\mu_1 \simeq \mu_i + |\nu| \quad (3.102)$$

$$\mu_2 = 2\mu_r \quad (3.103)$$

Par ailleurs, chaque fois que K apparaît comme dénominateur dans l'équation (3.101) on peut le remplacer par $2|\nu|$. De même, on peut calculer $\sin(2\theta)$ en se contentant d'une expression à l'ordre 0 en μ_1 et μ_2 . En utilisant la relation (3.87) on obtient alors :

$$\sin(2\theta) = \Im \left\{ \frac{(-\mu_2 + i(\mu_1 + K))^2}{4\nu^2} \right\} \simeq \Im \left\{ \frac{-K^2}{4\nu^2} \right\} = 2 \frac{\nu_i \nu_r}{|\nu|^2} \quad (3.104)$$

Le signe du coefficient en x^3 de la forme normale est donc le signe de $\nu_i \nu_r$. Ceci peut rapidement mener à une confusion, puisque le signe de ν_i est directement lié au signe de ϵ , alors que le signe du coefficient en x^3 doit être invariant par changement de signe de ϵ (l'espace des paramètres de l'expérience de départ est invariant par changement de signe de la brisure de symétrie). Reprenons alors la formule (3.102) : cette formule indique que la forme normale est valable au voisinage du point de codimension deux ($\mu_r = 0, \mu_i = -|\nu|$), c'est-à-dire pour une valeur négative de μ_i . En se souvenant que l'espace des paramètres est symétrique sous $\epsilon \rightarrow -\epsilon$, le bon critère est donc que le signe du coefficient en x^3 est celui de $-\mu_i \nu_i \nu_r$. Cette dernière expression est bien invariante par changement de signe de ϵ . Un changement d'échelles de temps, de x , et de y , permet finalement de mettre le système d'équations sous forme normale :

$$\dot{x} = y \quad (3.105)$$

$$\dot{y} = \tilde{\mu}_1 x + \tilde{\mu}_2 y - x^2 y + \text{signe}(-\mu_i \nu_i \nu_r) \times x^3 \quad (3.106)$$

avec :

$$\tilde{\mu}_1 = 50 \frac{|\nu|^3}{\nu_r^2 \nu_i^2} (\mu_i + |\nu|) \quad (3.107)$$

$$\tilde{\mu}_2 = 10 \frac{|\nu|}{|\nu_r \nu_i|} \mu_r \quad (3.108)$$

Chapitre 4

Dynamos engendrées par une variation spatiale de perméabilité magnétique

Le fait que les disques de l'expérience VKS soient en fer est un ingrédient déterminant, sans lequel aucun champ dynamo n'a été observé. Dans les modélisations numériques de l'expérience, le fer a d'abord été pris en compte sous la forme d'une modification des conditions aux limites : à la frontière avec un ferromagnétique parfait, le champ magnétique se connecte perpendiculairement à celui-ci. Le fer n'aurait alors pour effet que de modifier la géométrie du mode instable et d'abaisser le seuil dynamo, les processus d'induction ayant lieu au sein du fluide. Cependant, des campagnes d'expérience VKS ont également révélé qu'un disque en inox muni de pales en fer, ou un disque en fer muni de pales en inox ne réalise pas la dynamo. Les pales des disques semblent donc intervenir dans les processus d'induction. Si ces pales sont en inox, elles conduisent mal l'électricité et limitent la possibilité d'un fort courant azimuthal au voisinage du disque. Cette hypothèse pourrait être testée en vérifiant par exemple qu'un disque en fer muni de pales en cuivre, qui conduisent bien l'électricité, permet d'observer l'effet dynamo.

Une autre hypothèse confère aux pales un rôle "actif" dans les processus d'induction. En effet, il a été remarqué par Busse et Wicht en 1991 [29] qu'une paroi présentant une modulation spatiale périodique de conductivité électrique permet d'obtenir une dynamo à partir d'un écoulement qui ne fait pas de champ magnétique en l'absence de cette modulation. L'écoulement choisi par ces derniers est particulièrement simple, il est plan et uniforme : un théorème anti-dynamo nous assure alors que cet écoulement ne peut pas réaliser de dynamo dans un milieu de conductivité et perméabilité magnétique uniformes [11].

Dans le but de modéliser la présence de huit pales ferromagnétiques sur chacun des disques de l'expérience, on s'intéresse donc à un écoulement uniforme délimité par une paroi dont la perméabilité magnétique varie périodiquement dans l'espace : cette géométrie permet-elle d'observer l'effet dynamo, comme lorsque la conductivité électrique varie ? Quel est l'ordre de grandeur du seuil d'instabilité ? Quel est le mécanisme de génération du champ magnétique ?

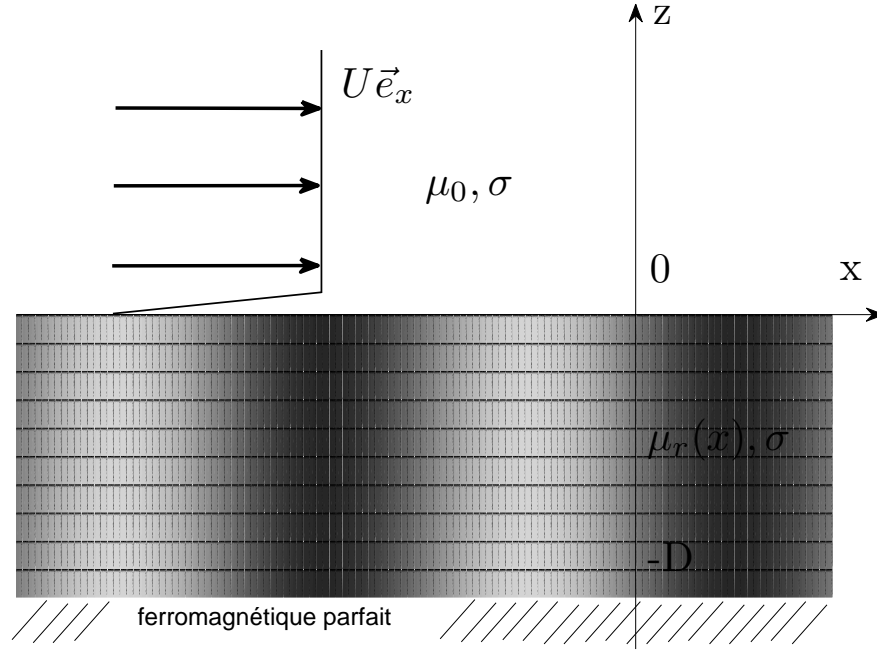


FIGURE 4.1 – Modèle minimal : un cisaillement infini à la frontière entre un fluide conducteur et une paroi de perméabilité variable.

4.1 Un modèle minimal de dynamo due à une variation de perméabilité magnétique

4.1.1 Géométrie du problème

On considère un écoulement uniforme $U\vec{e}_x$ localisé dans un demi-espace infini $\tilde{z} > 0$ (figure 4.1). Le fluide a une conductivité électrique σ et une perméabilité magnétique μ_0 . En dessous du fluide se trouve une paroi rigide, de même conductivité électrique que le fluide, et de perméabilité magnétique relative $\mu_r(\tilde{x}) = \alpha + \beta \sin(\tilde{x}/L)$. En $\tilde{z} < -DL$ se trouve un milieu de perméabilité magnétique uniforme et infinie : le champ magnétique se raccorde perpendiculairement à cette paroi. Remarquons d'ores et déjà qu'en $\tilde{z} = 0$ se trouve un cisaillement infini, associé à un effet ω qui crée du champ selon \tilde{x} à partir d'un champ selon \tilde{z} .

4.1.2 Equation d'induction avec μ_r variable

Choisissons L et $\mu_0\sigma L^2$ comme échelles d'espace et de temps, et définissons le nombre de Reynolds magnétique $Rm = \mu_0\sigma UL$. En notant sans tilde les coordonnées adimensionnées, le champ magnétique vérifie à l'intérieur du fluide l'équation d'induction :

$$\partial_t \vec{B} + Rm \partial_x \vec{B} = \Delta \vec{B} \quad (4.1)$$

A l'intérieur de la paroi structurée, la loi de Maxwell-Faraday couplée à la loi d'Ohm permet d'obtenir l'équation d'évolution de \vec{H} :

$$\mu_r \partial_t \vec{H} = -\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{H}) \quad (4.2)$$

Cette équation ne conduit en réalité qu'à deux équations scalaires indépendantes, la troisième étant obtenue à l'aide de la loi de Maxwell-Gauss :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 = \vec{\nabla} \cdot (\mu_r \vec{H}) \quad (4.3)$$

Le problème est invariant par translation selon y , si bien que les différents modes de Fourier dans cette direction sont découplés. On considère donc un mode propre de la forme $\vec{H} e^{st} e^{iky}$. On projette alors l'équation (4.2) sur x et z , et on remplace H_y par son expression en fonction de H_x et H_z obtenue à l'aide de l'équation (4.3), pour obtenir les deux équations couplées :

$$\mu_r^3 s H_x = \mu_r^2 (\partial_{xx} H_x - k^2 H_x + \partial_{zz} H_x) + (\mu_r'' \mu_r - (\mu_r')^2) H_x + \mu_r \mu_r' \partial_x H_x \quad (4.4)$$

$$\mu_r^2 s H_z = \mu_r (\partial_{xx} H_z - k^2 H_z + \partial_{zz} H_z) + \mu_r' \partial_z H_x \quad (4.5)$$

où $\mu_r(x) = \alpha + \beta \sin(x)$, et μ_r' désigne la dérivée de cette fonction par rapport à x .

4.1.3 Solution externe et conditions aux limites

L'objectif est de résoudre, analytiquement ou numériquement, les équations (4.4) et (4.5). Les conditions aux limites en $z = -D$ sont $H_x = 0$ et $H_y = 0$, donc d'après l'équation (4.3) : $\partial_z H_z = 0$. Les relations de passage de part et d'autre de $z = 0$ sont :

- La continuité de \vec{B} normal : $B_z|_{0+}/\mu_0 = \mu_r H_z|_{0-}$.
- La continuité de H_x : $B_x|_{0+}/\mu_0 = H_x|_{0-}$.
- La continuité de H_y qui à l'aide de l'équation (4.3) donne : $\partial_z B_z|_{0+}/\mu_0 = \partial_z H_z|_{0-} + \frac{\mu_r'}{\mu_r} H_x|_{0-}$
- La continuité du champ électrique suivant y :

$$\partial_z H_x|_{0-} - \partial_x H_z|_{0-} = \frac{1}{\mu_0} (\partial_z B_x|_{0+} - \partial_x B_z|_{0+}) + Rm \frac{B_z|_{0+}}{\mu_0} \quad (4.6)$$

Le dernier terme de cette dernière équation, proportionnel à Rm , est l'effet ω créé par le cisaillement infini présent en $z = 0$. Il crée du champ suivant x à partir d'un champ selon z .

L'équation d'induction dans le fluide ne dépend pas de x . On utilise également une transformée de Fourier dans cette direction pour obtenir les solutions :

$$\vec{B}^{(q)} \exp \left(st + ik y + i q x - \sqrt{s + k^2 + q^2 + i q R m z} \right) \quad (4.7)$$

On peut donc écrire, pour chacun des modes de Fourier en x :

$$\partial_z B_x|_{0+}^{(q)} = -\sqrt{s + k^2 + q^2 + i q R m} B_x|_{0+}^{(q)} \quad (4.8)$$

$$\partial_z B_z|_{0+}^{(q)} = -\sqrt{s + k^2 + q^2 + i q R m} B_z|_{0+}^{(q)} \quad (4.9)$$

puis combiner les quatre relations de passage écrites précédemment pour obtenir deux conditions aux limites sur le champ interne au milieu structuré :

$$\partial_z H_x|_{0-}^{(q)} - i q H_z|_{0-}^{(q)} + \sqrt{s + k^2 + q^2 + i q R m} H_x|_{0-}^{(q)} + i q \{ \mu_r H_z|_{0-} \}^{(q)} - Rm \{ \mu_r H_z|_{0-} \}^{(q)} = 0 \quad (4.10)$$

$$\partial_z H_z|_{0-}^{(q)} + \left\{ \frac{\mu_r'}{\mu_r} H_x|_{0-} \right\}^{(q)} + \sqrt{s + k^2 + q^2 + i q R m} \{ \mu_r H_z|_{0-} \}^{(q)} = 0 \quad (4.11)$$

où $\{F\}^{(q)}$ est le coefficient du champ F sur le mode de Fourier e^{iqx} . On note que les différents modes de Fourier sont couplés : du fait de la dépendance en x de μ_r , un terme du type $\{ \mu_r H_z|_{0-} \}^{(q)}$ fait intervenir les modes de Fourier de $H_z|_{0-}$ d'indices $q - 1$ et $q + 1$. Nous avons deux équations différentielles à résoudre, qui couplent deux champs réels. Ces deux équations sont d'ordre deux en z , et nous avons bien deux conditions aux limites complexes en $z = 0$ et deux en $z = -D$, ce qui correspond à huit conditions aux limites réelles.

4.2 Résolution numérique du problème linéaire

L'objectif du calcul de dynamo cinématique est de calculer les valeurs acceptables de s , puis de chercher s'il existe une valeur critique de Rm pour laquelle la partie réelle de s s'annule. La résolution du problème linéaire est effectuée dans le cas général à l'aide d'un code numérique. On s'intéresse dans cette partie uniquement à la réponse harmonique du système, en laissant de côté la possibilité d'une réponse sous-harmonique.

4.2.1 Décomposition spectrale-différences finies

La méthode de résolution utilisée est mixte : elle est spectrale dans la direction x , et aux différences finies dans la direction z . Décomposons dans un premier temps les champs sur les différents modes de Fourier en x :

$$H_x = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} u_n(z) e^{inx} \text{ et } H_z = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} v_n(z) e^{inx} \quad (4.12)$$

Les équations (4.4) et (4.5), une fois projetées sur chacun des modes de Fourier, conduisent alors à un système d'équations différentielles linéaires couplées pour les fonctions $(u_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{Z}}$. Les conditions aux limites en $z = -D$ et $z = 0$ pour chacune de ces fonctions ont été explicitées au paragraphe précédent. La méthode de résolution numérique consiste à tronquer la décomposition en modes de Fourier à $n \in \{-N, \dots, N\}$, puis à résoudre le système d'équations différentielles en z obtenu à l'aide d'une méthode aux différences finies. On décompose alors chaque fonction u_n sur P points de grille régulièrement espacés : $u_n^{(p)} = u_n(-D + pdz)$, avec $dz = D/P$ et $p \in \{1, \dots, P\}$. On décompose de même chaque fonction v_n sur $P + 1$ points de grille régulièrement espacés : $v_n^{(p)} = v_n(-D + (p-1)dz)$, $p \in \{1, \dots, P+1\}$. Les différents opérateurs, tels que la multiplication par $\mu_r(x)$ ou ses dérivées, la dérivation par rapport à x ou z , et ce pour chacune des deux équations (4.4) et (4.5), s'écrivent alors comme une matrice de taille $((2N+1)(2P+1))^2$ qui agit sur le vecteur $V = (u_{-N}^{(1)}, \dots, u_N^{(1)}, u_{-N}^{(2)}, \dots, u_N^{(2)}, \dots, u_{-N}^{(P)}, \dots, u_N^{(P)}, v_{-N}^{(1)}, \dots, v_N^{(1)}, \dots, v_{-N}^{(P+1)}, \dots, v_N^{(P+1)})$. Ce vecteur a $(2N+1)(2P+1)$ coefficients. Les coefficients de bords des matrices de dérivation par rapport à z s'obtiennent à partir des conditions aux limites. Les détails concernant l'obtention des matrices représentant chacun des opérateurs sont donnés en appendice.

Le système d'équation à résoudre s'écrit maintenant sous la forme matricielle :

$$sMV = N(s)V \quad (4.13)$$

où la matrice N dépend du paramètre s . Une méthode pour résoudre cette équation matricielle consiste à utiliser une première valeur s_0 , puis à obtenir la valeur de s_1 par résolution du problème aux valeurs propres $s_1 MV = N(s_0)V$. On réinjecte ensuite s_1 dans la matrice N et on réitère l'opération. Ce processus permet de converger en quelques itérations vers une valeur de s qui vérifie l'équation (4.13). Lorsque N et P sont suffisamment grands, la valeur de s obtenue est convergée et ne dépend plus de la résolution.

4.2.2 Une dynamo due à la modulation de perméabilité magnétique

Le premier résultat du calcul numérique est qu'il existe une dynamo : pour peu que Rm soit suffisamment grand, moduler la perméabilité magnétique de la paroi suffit à déstabiliser un mode de champ magnétique, et à contourner le théorème qui dit qu'un écoulement plan ne peut réaliser une dynamo.

On représente sur la figure 4.2 le seuil, le vecteur d'onde critique k_c et la pulsation au seuil $Im(s)$, en fonction de la modulation relative de perméabilité : $\beta_{rel} = \beta/(\alpha - 1)$. On suppose que

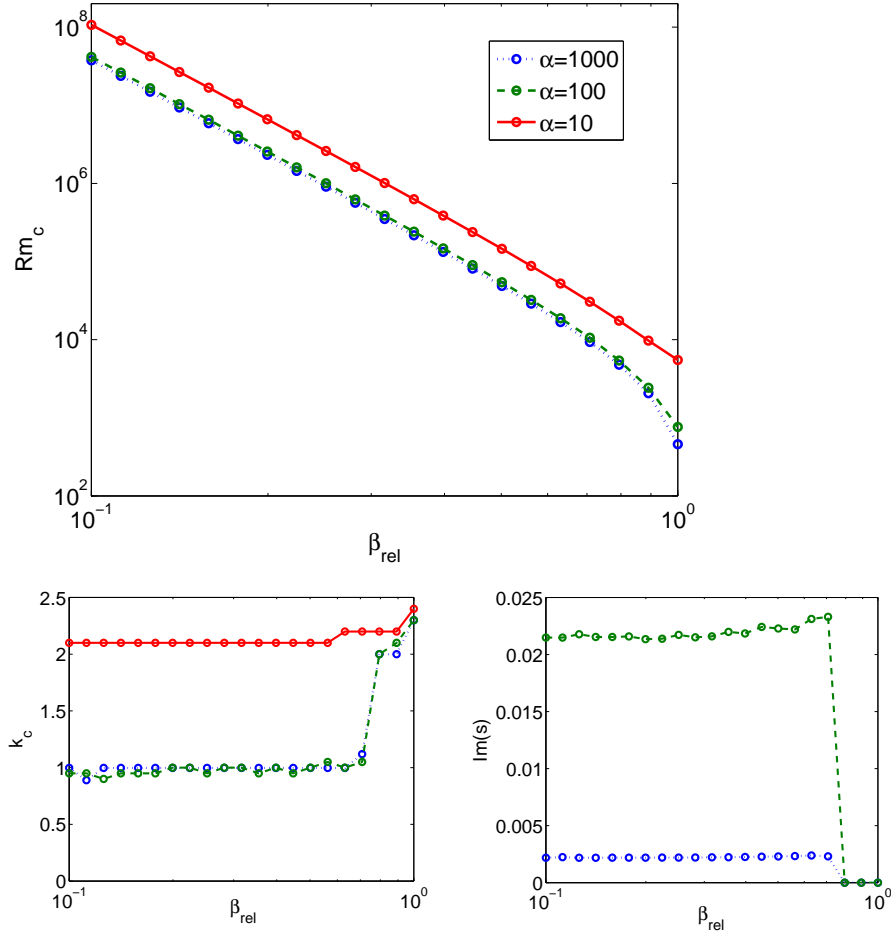


FIGURE 4.2 – Nombre de Reynolds magnétique critique, vecteur d’onde au seuil, et pulsation au seuil, en fonction de l’amplitude de la modulation relative de perméabilité magnétique, pour $D = 1$. Pour $\alpha = 10$ le mode instable est stationnaire.

la paroi ne peut être localement diamagnétique, si bien que μ_r doit être partout plus grand que 1. La notation β_{rel} permet d’avoir une quantité comprise entre 0 et 1, quelle que soit la valeur de α . $\beta_{rel} = 0$ correspond au cas où l’on ne module pas la perméabilité magnétique, tandis que $\beta_{rel} = 1$ correspond à la modulation maximale $\mu_r(x) = \alpha + (\alpha - 1) \sin(x)$. Ces calculs ont été effectués pour $D = 1$. On constate que plus l’amplitude de la modulation de perméabilité est grande, plus le seuil dynamo est bas. Lorsque l’amplitude de la modulation tend vers 0, le seuil diverge, en accord avec le théorème anti-dynamo pour les écoulements plans. La divergence du seuil se fait en β_{rel}^{-4} . On constate également que le mode le plus instable est oscillant pour les hautes valeurs de α et faibles valeur de β_{rel} , tandis qu’il est stationnaire lorsque β_{rel} s’approche de 1. Outre les résultats présentés sur la figure 4.2, si l’on augmente α la pulsation au seuil tend vers zéro, et si l’on augmente suffisamment D le mode le plus instable est un mode stationnaire. L’espace des paramètres est donc relativement riche et sera décrit en détails lors du calcul asymptotique.

On observe enfin que, à modulation de perméabilité relative β_{rel} fixée et α élevé, le seuil dynamo est d’autant plus bas que α est grand. Il atteint une limite finie lorsque $\alpha \rightarrow \infty$. On représente sur la figure 4.3 le seuil de la dynamo stationnaire en fonction de α , pour $\beta = \alpha - 1$ (modulation de μ_r d’amplitude maximale $\beta_{rel} = 1$) et toujours $D = 1$. Ce seuil est toujours minimisé par rapport au vecteur d’onde k . Ce minimum a lieu autour de $k = 2.3$ pour les valeurs

des paramètres correspondant à cette figure.

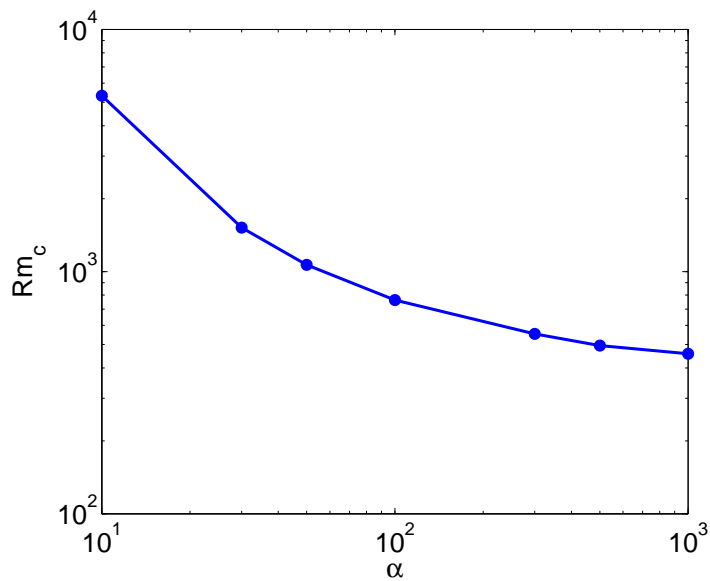


FIGURE 4.3 – Nombre de Reynolds magnétique critique en fonction de α pour une perméabilité magnétique $\mu_r(x) = \alpha + (\alpha - 1) \sin(x)$, et $D = 1$. La dynamo est stationnaire et le vecteur d'onde critique est $k_c = 2.3 \pm 0.1$.

4.2.3 Influence de l'épaisseur D de la paroi

On représente sur la figure 4.4 le seuil et le vecteur d'onde critique de la dynamo en fonction de l'épaisseur D de la paroi. On constate que le nombre de Reynolds magnétique critique est une fonction décroissante de D , qui diverge comme D^{-1} lorsque l'épaisseur D tend vers zéro, et qui tend vers une limite finie lorsque $D \rightarrow \infty$. Le vecteur d'onde critique croît également comme D^{-1} lorsque D tend vers zéro : à faible épaisseur, la taille caractéristique du mode en y est de l'ordre de grandeur de l'épaisseur du domaine.

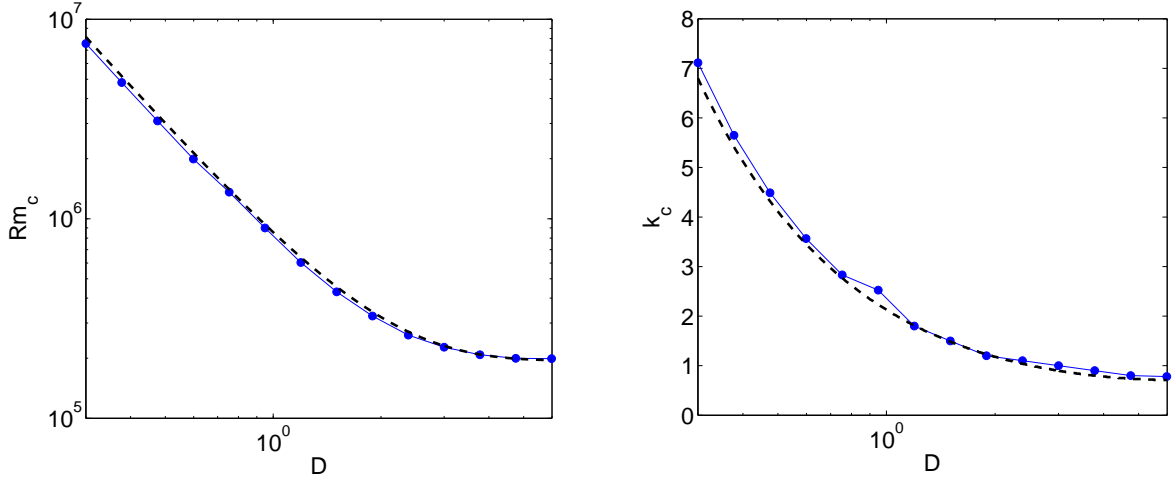


FIGURE 4.4 – Nombre de Reynolds magnétique critique et vecteur d'onde critique en fonction de l'épaisseur de la paroi, pour $\alpha = 10$ et $\beta = 3$. Les courbes pleines sont le résultat du calcul numérique, et les lignes tiretées sont issues du calcul asymptotique pour une modulation faible (présenté en partie 4.3).

4.2.4 Structure du mode neutre

Le mode neutre à l'intérieur de la paroi est représenté sur la figure 4.5 pour $\alpha = 10$ et $\beta = 9$. Le champ \vec{H} est localisé dans la région où la perméabilité magnétique est la plus faible, et présente une forte variation en x au voisinage du minimum de μ_r , c'est-à-dire en $x = 3\pi/2$. Cette localisation de \vec{H} est d'autant plus forte que α est grand (avec toujours $\beta = \alpha - 1$). En conséquence la résolution nécessaire pour le calcul numérique augmente fortement lorsque l'on passe de $\alpha = 10$ à $\alpha = 1000$. Il est intéressant de constater que le champ \vec{B} a des variations nettement plus lisses que \vec{H} .

La dépendance en y du mode propre dépend de si ce dernier est stationnaire ou oscillant. Pour un mode stationnaire, le taux de croissance s est réel et le champ s'écrit :

$$e^{st}[\vec{H}(x, y)e^{iky} + c.c.] = e^{st}[Re(\vec{H}(x, y))\cos(ky) - Im(\vec{H}(x, y))\sin(ky)] \quad (4.14)$$

Le problème considéré est invariant par réflexion par rapport au plan $y = 0$. On peut alors chercher des modes de champ pairs ou impairs par cette transformation, les premiers étant déduits des seconds par une simple translation en y . Dans le cas d'un mode pair, les composantes H_x et H_z évoluent en $\cos(ky)$ et la composante H_y est en $\sin(ky)$. Dans le cas d'un mode impair c'est l'inverse, et dans le cas général on peut toujours redéfinir l'origine de l'axe y pour se ramener au cas d'un mode pair. Ainsi, il suffit de multiplier les champs représentés sur la figure 4.5 par

$\sin(ky)$ pour ajouter leur dépendance en y . La composante H_y , qui n'est pas représentée, devrait en conséquence être multipliée par $-\cos(ky)$. Dans le cas d'un mode oscillant, s est un nombre complexe et le champ s'écrit :

$$e^{Re(s)t} [Re(\vec{H}(x, y)) \cos(ky + Im(s)t) - Im(\vec{H}(x, y)) \sin(ky + Im(s)t)] \quad (4.15)$$

Le mode propre est une onde qui se propage dans la direction y , et la réflexion par rapport à $y = 0$ nous indique simplement que le complexe conjugué de s est valeur propre du problème et correspond à une onde qui se propage en sens opposé dans la direction y . Une composante du champ en un y_1 donné ne se déduit pas de cette composante en un $y_2 \neq y_1$ par une simple multiplication par $\sin(ky)$ ou $\cos(ky)$.

Le champ externe possède une composante moyenne non nulle. Celle-ci est essentiellement dirigée selon x du fait de la forte valeur de Rm_c , et donc du fort effet ω qui transforme un petit champ suivant z en un fort champ selon x . A ce champ indépendant de x se superpose un champ structuré en x . Celui-ci est localisé au voisinage de la paroi et décroît très rapidement quand z augmente : dès que l'on s'éloigne un peu de la paroi, il ne reste essentiellement qu'un champ dirigé selon x et indépendant de x .

Si l'on suit une ligne (orientée) de champ magnétique \vec{B} , on constate que le champ plonge dans la paroi là où la perméabilité magnétique devient importante, et ressort du matériau là où elle est de l'ordre de 1. Ceci confirme bien l'intuition selon laquelle les zones de forte perméabilité magnétique canalisent le champ magnétique.

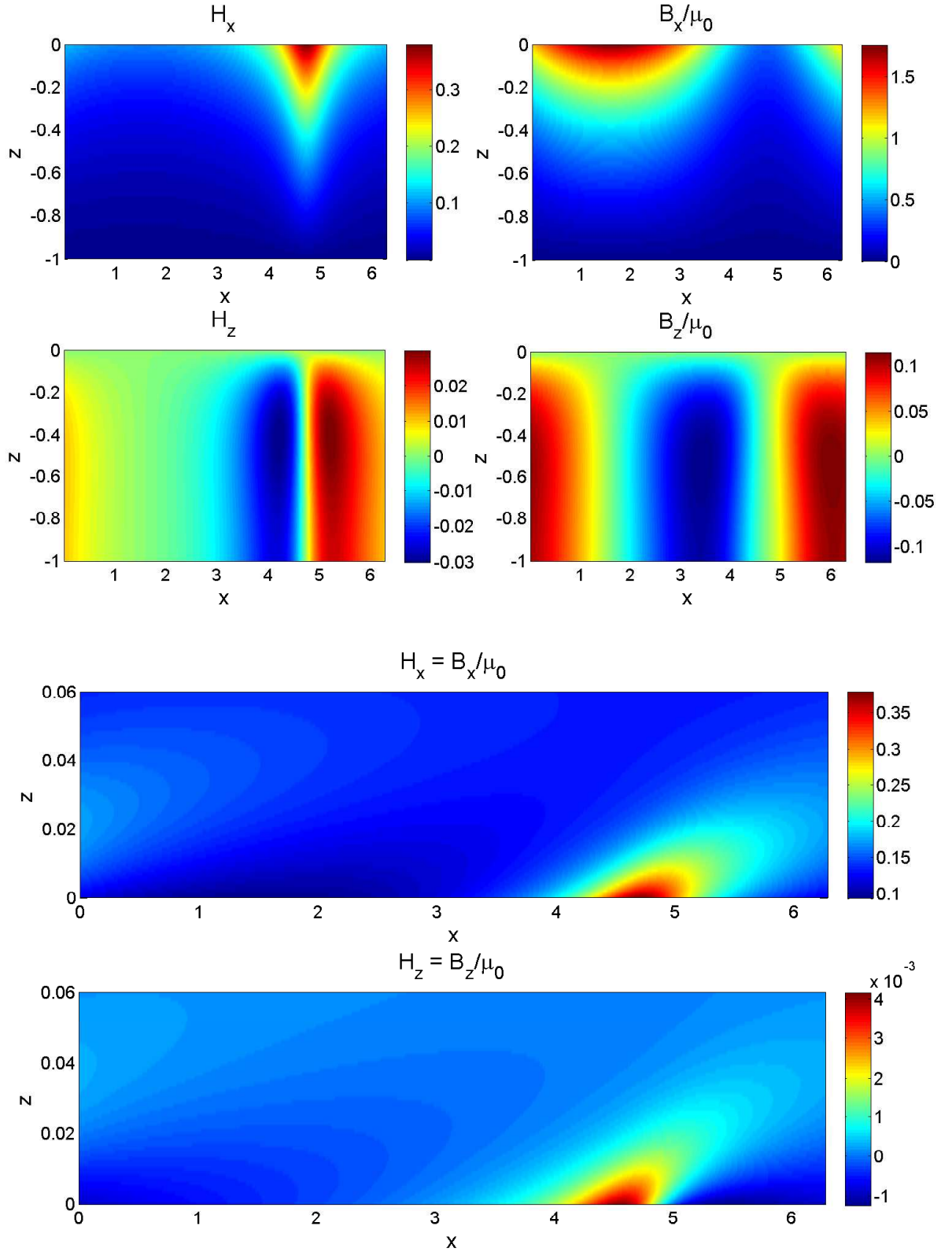


FIGURE 4.5 – Mode neutre de champ magnétique pour $\alpha = 10$, $\beta = 9$, et $D = 1$: les quatre premières images correspondent au champ interne à la paroi, tandis que les deux images du bas correspondent au champ au sein du fluide. Ce champ dépend sinusoidalement de y (H_x et H_z sont en phase, H_y est en quadrature).

4.3 Développement asymptotique pour une modulation faible de perméabilité magnétique

Dans le but d'explicitier le mécanisme de cette dynamo, on se concentre à présent sur le cas d'une faible modulation de perméabilité magnétique. On écrit donc $\mu_r = \alpha(1 + \epsilon \sin(x))$, avec $\epsilon \ll 1$. La modulation relative de perméabilité vaut alors $\beta_{rel} = \alpha\epsilon/(\alpha - 1)$. Dans cette limite le mode instable de la dynamo comprend uniquement deux types de dépendances en x :

- Un champ à grande échelle, c'est-à-dire indépendant de x .
- Une réponse harmonique, c'est-à-dire un champ en $\cos(x)$ et $\sin(x)$.

La réponse harmonique est beaucoup plus faible que le champ à grande échelle : elle résulte de l'action de la modulation de perméabilité sur le champ à grande échelle, et est donc au moins ϵ fois plus petite que ce dernier. Le mode propre présente donc une séparation d'échelles que l'on souhaite exploiter à l'aide d'un développement asymptotique, dans le même esprit que le calcul de la dynamo de G.O. Roberts. On définit donc une moyenne :

$$\langle f \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{x-\pi}^{x+\pi} f(\tilde{x}) d\tilde{x} \quad (4.16)$$

et on décompose chacun des champs des équations (4.4) et (4.5) en deux composantes :

$$H_x = \mathcal{H}_x(z) + h_x(x, z) \quad (4.17)$$

$$H_z = \mathcal{H}_z(z) + h_z(x, z) \quad (4.18)$$

où \mathcal{H}_x et \mathcal{H}_z correspondent au champ grande échelle et h_x et h_z à la réponse harmonique. On suppose enfin la hiérarchisation $\mathcal{H}_z \ll h_x, h_z \ll \mathcal{H}_x$, avec :

$$h_x, h_z \sim \epsilon \mathcal{H}_x \quad (4.19)$$

$$\mathcal{H}_z \sim \epsilon^4 \mathcal{H}_x \quad (4.20)$$

On verra dans la suite que les différentes quadratures de h_x , et h_z (i.e. $\cos(x)$ et $\sin(x)$) arrivent à des ordres différents, et on explicitera les lois d'échelles uniquement dans la dernière partie du calcul.

4.3.1 Evolution couplée des champs à grande et petite échelle

Divisons l'équation (4.4) par μ_r^2 avant d'en prendre la moyenne selon x , pour obtenir à l'ordre dominant :

$$\partial_{zz} \mathcal{H}_x - (k^2 + \alpha s) \mathcal{H}_x = 0 \quad (4.21)$$

dont la solution qui vérifie les conditions aux limites en $z = -D$ est :

$$\mathcal{H}_x = \tilde{H}_x \sinh(\sqrt{k^2 + \alpha s}(z + D)) \quad (4.22)$$

La partie fluctuante de l'équation donne alors à l'ordre dominant :

$$\partial_{zz} h_x - (k^2 + 1 + \alpha s) h_x = \epsilon(1 + \alpha s) \sin(x) \mathcal{H}_x \quad (4.23)$$

dont la solution qui vérifie les conditions aux limites en $z = -D$ est :

$$h_x = -\epsilon(1 + \alpha s) \tilde{H}_x \sin(x) \sinh(\sqrt{k^2 + \alpha s}(z + D)) + [a \cos(x) + b \sin(x)] \sinh(\sqrt{k^2 + 1 + \alpha s}(z + D)) \quad (4.24)$$

La partie fluctuante de l'équation (4.5) divisée par μ_r donne à l'ordre dominant :

$$\partial_{zz}h_z - (k^2 + 1 + \alpha s)h_z = -\epsilon \cos(x)\partial_z\mathcal{H}_x \quad (4.25)$$

qui a pour solution vérifiant les conditions aux limites en $z = -D$:

$$h_z = \epsilon\sqrt{k^2 + \alpha s}\tilde{H}_x \cos(x) \cosh(\sqrt{k^2 + \alpha s}(z+D)) + [c \cos(x) + d \sin(x)] \cosh(\sqrt{k^2 + 1 + \alpha s}(z+D)) \quad (4.26)$$

La moyenne de cette même équation donne enfin :

$$\partial_{zz}\mathcal{H}_z - (k^2 + \alpha s)\mathcal{H}_z + \langle \epsilon \cos(x)\partial_z h_x \rangle = 0 \quad (4.27)$$

Si la partie de h_x en $\sin(x)$ est bien d'ordre ϵ , on constate ici que la partie en $\cos(x)$ de h_x est d'ordre ϵ^3 . La solution de cette équation qui vérifie les conditions aux limites en $z = -D$ est :

$$\mathcal{H}_z = -\epsilon\frac{a}{2}\sqrt{k^2 + 1 + \alpha s} \cosh(\sqrt{k^2 + 1 + \alpha s}(z+D)) + \tilde{H}_z \cosh(\sqrt{k^2 + \alpha s}(z+D)) \quad (4.28)$$

4.3.2 Conditions aux limites en $z = 0$, et seuil de la dynamo

Les différents champs s'expriment à l'aide des 6 amplitudes réelles $\tilde{H}_x, \tilde{H}_z, a, b, c, d$, si bien qu'il nous faut 6 conditions aux limites en $z = 0$. On obtient ces 6 relations à partir des deux conditions aux limites mixtes (4.10) et (4.11), considérées pour les harmoniques $q = 0$ (champ à grande échelle), $q = +1$ et $q = -1$. Le détail du calcul est fourni en appendice, il conduit à un système de 6 équations à 6 inconnues réelles. Pour que ce système admette une autre solution que la solution triviale 0, il faut que le déterminant (complexe) de ce système soit nul. Si l'on se place au seuil de la dynamo, la valeur propre s est imaginaire pure. De plus, on observe dans les calculs numériques que le seuil de la dynamo diverge comme ϵ^{-4} quand ϵ tend vers 0. On pose donc $Rm = \tilde{R}m/\epsilon^4$ et on développe le déterminant du système au premier ordre non nul en ϵ à l'aide du logiciel Mathematica. L'annulation du déterminant complexe fournit deux équations implicites sur la valeur critique de $\tilde{R}m$ et sur la pulsation au seuil.

Dans ce qui suit, comme dans les calculs numériques présentés précédemment, on ne suppose aucune contrainte sur la valeur de k : le système est infini en y et des perturbations de taille arbitraire dans cette direction pourront se développer. On s'intéresse alors au premier mode instable lorsque l'on augmente nombre de Reynolds magnétique, à α et D fixés. On retrouve par ce calcul asymptotique les seuils, pulsations, et vecteurs d'onde au seuil des trois courbes de la figure 4.2, dans la limite de faible modulation. Plus généralement, trois modes propres sont en compétition :

- Un mode oscillant : ce mode est le plus instable quand D est faible et α grand. Le vecteur d'onde au seuil est de l'ordre de 1 pour $D = 1$. La pulsation au seuil tend vers 0 comme $1/\alpha$ quand α augmente.
- Un mode stationnaire, qui apparaît à k_c fini et relativement élevé. Le vecteur d'onde au seuil k_c tend vers une limite finie quand $D \rightarrow \infty$.
- Un autre mode stationnaire, qui lui apparaît à k_c beaucoup plus faible. Ce vecteur d'onde au seuil k_c tend vers zéro quand $D \rightarrow \infty$. On rencontre ce mode pour les faibles valeurs de α et les grandes valeurs de D .

La nature du premier mode instable dans le plan (D, α) est représentée sur la figure 4.6. Rappelons que ce diagramme a été calculé à l'aide du développement asymptotique, et qu'il n'est valable que pour de faibles modulations de perméabilité. Pour une modulation suffisamment élevée, nous avons systématiquement observé un premier mode instable stationnaire (voir

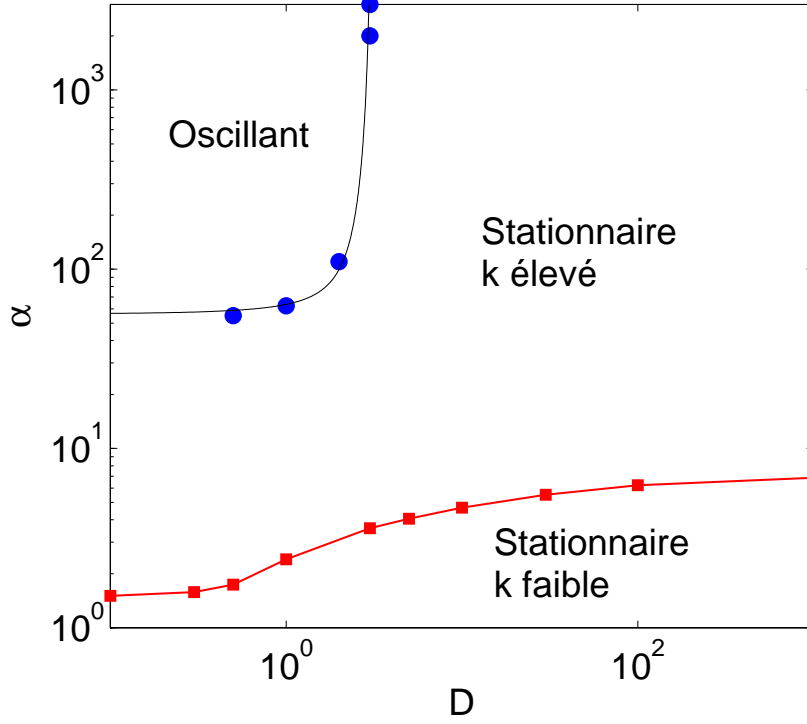


FIGURE 4.6 – Nature du premier mode instable en fonction des valeurs de D et α , obtenu à partir de l'analyse asymptotique pour une faible modulation de perméabilité

figure 4.2).

Dans le cas où le mode cherché est stationnaire, l'annulation du déterminant donne une expression analytique pour le seuil :

$$\begin{aligned} \tilde{R}m_c &= \left[2\sqrt{2} \sinh \left(2\sqrt{k^2 + 1}D \right)^2 (\sinh(kD) + \cosh(kD))(\alpha \cosh(kD) + \sinh(kD)) \right]^2 (4.29) \\ &\times \left[\left(4\alpha k (k^2 + 1) \sinh(kD)^2 \cosh \left(\sqrt{k^2 + 1}D \right)^4 \right. \right. \\ &\quad - 4\alpha k^2 \sqrt{k^2 + 1} \sinh(2kD) \sinh \left(\sqrt{k^2 + 1}D \right) \cosh \left(\sqrt{k^2 + 1}D \right)^3 \\ &\quad + k \left(\cosh(kD)^2 \left(\alpha k^2 \sinh \left(2\sqrt{k^2 + 1}D \right)^2 + 4(k^2 + 1) \sinh \left(\sqrt{k^2 + 1}D \right)^4 \right) \right. \\ &\quad \left. \left. + (k^2 + 1) \sinh(kD)^2 \sinh \left(2\sqrt{k^2 + 1}D \right)^2 \right) \right. \\ &\quad \left. \left. - 2\sqrt{k^2 + 1} (2k^2 + 1) \sinh(2kD) \sinh \left(\sqrt{k^2 + 1}D \right)^3 \cosh \left(\sqrt{k^2 + 1}D \right) \right) \right]^{-2} \end{aligned}$$

Il convient ensuite de minimiser cette expression par rapport à k pour trouver le vecteur d'onde critique puis le seuil d'instabilité dynamo. La courbe $\tilde{R}m_c$ en fonction de k est tracée sur la figure 4.7. Elle possède deux minima locaux, l'un correspondant au mode propre de k_c élevé et l'autre à celui de k_c faible. Le résultat de la minimisation est tracé sur la figure 4.4 : l'accord avec le calcul numérique est très bon et ce même pour $\epsilon = 0.3$. Néanmoins, cette expression du seuil est relativement lourde, et on préférera discuter la physique dans certains cas limites du problème.

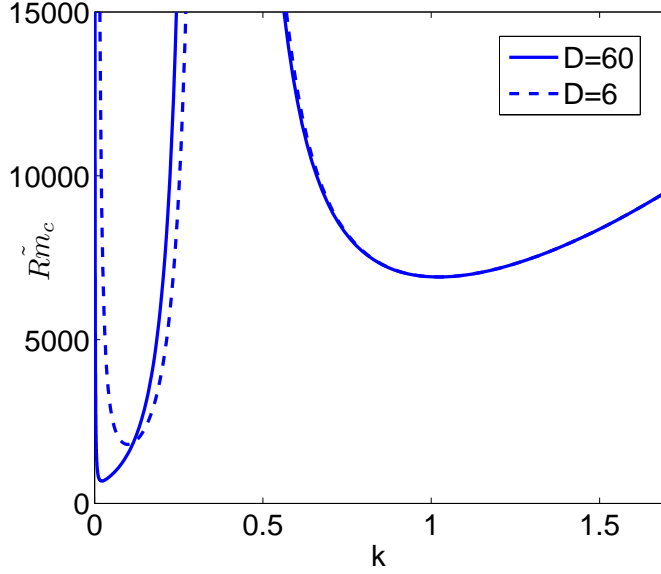


FIGURE 4.7 – La courbe \tilde{Rm}_c en fonction de k possède deux minima locaux. Quelle que soit la valeur finie de D , \tilde{Rm}_c diverge quand $k \rightarrow 0$. Lorsque D augmente, la courbe s'écrase contre l'axe des ordonnées, et tend vers une courbe limite qui admet une limite finie en $k = 0$. Courbes tracées pour $\alpha = 3$.

4.3.3 Limite $D \rightarrow \infty$: seuil et structure du mode instable

Dans la limite d'une paroi infiniment étendue vers les z négatifs, le mode instable est stationnaire ($s = 0$ au seuil), et les cosinus et sinus hyperboliques en z sont remplacés par des exponentielles qui décroissent quand $z \rightarrow -\infty$. On introduit les lois d'échelle, et on réécrit finalement les champs sous la forme :

$$\mathcal{H}_x = \hat{H}_x e^{kz} \quad (4.30)$$

$$h_x = -\epsilon \hat{H}_x \sin(x) e^{kz} + (\epsilon^3 \hat{a} \cos(x) + \epsilon \hat{b} \sin(x)) e^{\sqrt{k^2+1}z} \quad (4.31)$$

$$h_z = \epsilon k \hat{H}_x \cos(x) e^{kz} + (\epsilon \hat{c} \cos(x) + \epsilon^3 \hat{d} \sin(x)) e^{\sqrt{k^2+1}z} \quad (4.32)$$

$$\mathcal{H}_z = -\epsilon^4 \frac{\sqrt{k^2+1}}{2} \hat{a} e^{\sqrt{k^2+1}z} + \epsilon^4 \hat{H}_z e^{kz} \quad (4.33)$$

où toutes les grandeurs avec des chapeaux sont d'ordre $\mathcal{O}(1)$. Ces grandeurs vérifient le système d'équations écrit en appendice, dans lesquelles on remplace tous les $\cosh(\dots)$ et $\sinh(\dots)$ par 1, et on effectue la substitution $\tilde{H}_x = \hat{H}_x$, $a = \epsilon^3 \hat{a}$, $b = \epsilon \hat{b}$, $c = \epsilon \hat{c}$, $d = \epsilon^3 \hat{d}$, $\tilde{H}_z = \epsilon^4 \hat{H}_z$. Ce système d'équations (après quelques combinaisons linéaires d'équations, divisions et multiplications par ϵ) se met finalement sous la forme :

$$\{\mathcal{M}_0 + \epsilon^2 \mathcal{M}_1 + \epsilon^4 \mathcal{M}_2 + \mathcal{O}(\epsilon^6)\} u = 0 \quad (4.34)$$

où \mathcal{M}_0 , \mathcal{M}_1 , et \mathcal{M}_2 sont des matrices 6×6 à coefficients réels, et u est le vecteur de coordonnées $(\hat{H}_x, \hat{a}, \hat{b}, \hat{c}, \hat{d}, \hat{H}_z)$.

Si l'on effectue un développement de u en ϵ^2 , on obtient à l'ordre le plus bas la structure du mode instable, tandis qu'une condition de solvabilité à l'ordre ϵ^4 fixe le seuil d'instabilité. L'expression de ce \tilde{Rm} critique est évidemment la limite de (4.29) quand $D \rightarrow \infty$:

$$\tilde{Rm}_c = \frac{32(1+\alpha)^2}{[\sqrt{1+k^2}(1+2k^2+2\alpha k^2) - 2k(k^2+1) - \alpha k(2k^2+1)]^2} \quad (4.35)$$

Cette expression possède deux minima locaux en fonction de k :

$$\left\{ \begin{array}{l} k_c = 0 \\ Rm_c = \frac{32(1+\alpha)^2}{\epsilon^4} \end{array} \right. \text{ et } \left\{ \begin{array}{l} k_c = \sqrt{\frac{(2+\alpha)^2}{3(\alpha^2-1)}} \\ Rm_c = \frac{864}{\epsilon^4} \left(\frac{\alpha+1}{\alpha-1} \right)^3 \end{array} \right. \quad (4.36)$$

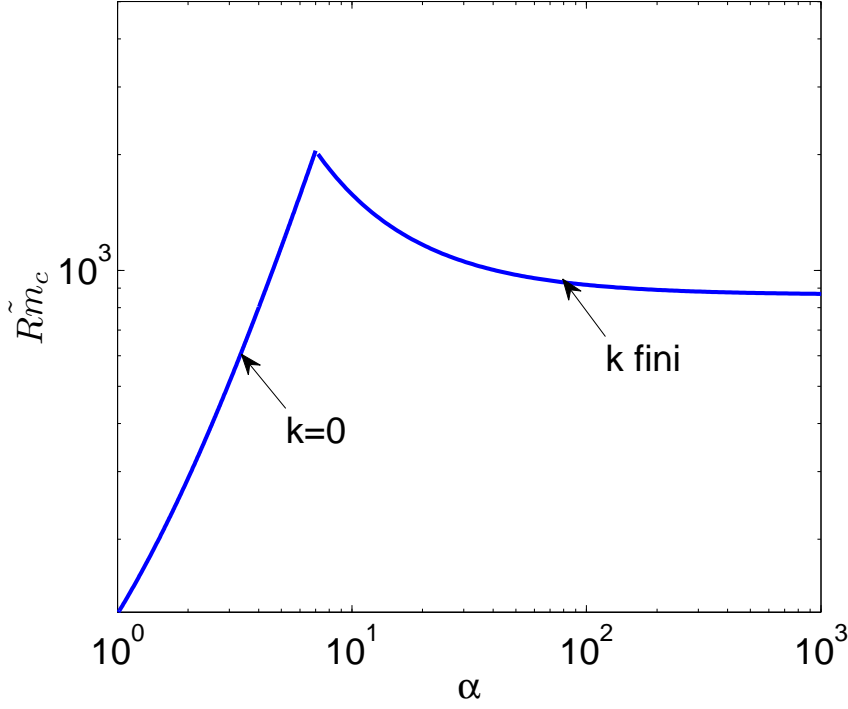


FIGURE 4.8 – Seuil en fonction de α , obtenu grâce à l'analyse asymptotique et dans la limite où D est infinie.

Les deux valeurs de Rm_c sont égales pour $\alpha_c = 7$, ce qui correspond bien à la limite quand $D \rightarrow \infty$ de la frontière entre les deux modes stationnaires représentée sur la figure 4.6. Pour $\alpha < 7$, le champ croît à $k_c = 0$, et pour $\alpha > 7$ il croît à k_c fini. Le seuil possède alors une dépendance non-monotone en α , qui est représentée sur la figure 4.8. En regardant cette courbe, il semblerait qu'il vaille mieux utiliser une perméabilité moyenne la plus faible possible pour obtenir la dynamo ! Ceci n'est en fait vrai que dans la limite où le système est infini dans les directions y et z , et où la modulation de perméabilité est faible. Pour un système ayant une taille finie de l'ordre de L dans les directions y et z , le mode à k le plus faible a un seuil très élevé, et c'est le mode à k élevé qui est le plus instable. Ce dernier a un seuil décroissant en fonction de α , le minimum étant atteint quand $\alpha \rightarrow \infty$, avec :

$$k_c = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ et } Rm_c = \frac{864}{\epsilon^4} \quad (4.37)$$

Si la structure du mode neutre v_d est relativement compliquée pour α quelconque, elle se simplifie dans cette double limite ϵ faible et α infini :

$$\hat{H}_x = -216\sqrt{3}, \hat{a} = \sqrt{3}, \hat{b} = -72\sqrt{3}, \hat{c} = 216, \hat{d} = 0, \hat{H}_z = 1 \quad (4.38)$$

On précise que le coefficient \hat{d} n'est nul que pour α infini.

4.3.4 Mécanisme de cette dynamo

Le mode neutre est représenté à chaque ordre sur la figure 4.9, toujours dans la limite α grand. Cette représentation ainsi que les différentes lois d'échelle nous permettent de comprendre le mécanisme de génération du champ magnétique dans cette dynamo. Ce mécanisme peut être décomposé en 4 étapes :

- Supposons qu'il existe un champ grande échelle \mathcal{H}_x à l'intérieur de la paroi : la modulation de μ_r va créer un champ petite échelle d'ordre $h_1 \sim \epsilon \mathcal{H}_x$. Cependant, une nouvelle action de la modulation de perméabilité sur h_1 ne suffit pas à créer un champ grande échelle \mathcal{H}_z : les termes à moyenner sont en quadrature et les petites échelles ne rétroagissent pas sur la grande échelle. Ceci vient de la symétrie suivante : en l'absence d'écoulement, le système est symétrique par réflexion par rapport à un plan $x = \pi/2$ (entre autres). Le champ magnétique est donc soit symétrique, soit antisymétrique par réflexion par rapport à ce plan. Dans les deux cas, le mode propre ne pourra pas posséder à la fois du champ à grande échelle suivant x et z . Il faut donc invoquer l'écoulement de fluide, qui brise la symétrie $x \rightarrow -x$, dès l'étape de conversion de \mathcal{H}_x en \mathcal{H}_z .
- Pour que les petites échelles puissent reformer des grandes échelles, il faut créer du champ en quadrature avec h_1 . Ceci est effectué par l'advection due au fluide. A la frontière fluide-paroi, la condition aux limites (4.11) donne environ : $\sqrt{Rm}h_2 \sim h_1$, soit $h_2 \sim Rm^{-1/2}h_1$. Cette loi d'échelle traduit l'effet de peau : vu depuis un référentiel en translation à vitesse $U\vec{e}_x$, le champ qui sort de la paroi est un champ oscillant, qui va donc pénétrer dans le fluide uniquement sur une longueur de peau d'ordre $Rm^{-1/2}$.
- Le champ h_2 interagit à nouveau avec la modulation de perméabilité pour recréer du champ à grande échelle : $\mathcal{H}_z \sim \langle h_2\mu_r \rangle \sim \epsilon h_2$.
- Enfin, ce champ \mathcal{H}_z est cisailé et recréé du champ selon x à grande échelle : $\mathcal{H}_x \sim Rm\mathcal{H}_z$.

Ce mécanisme conduit finalement à un cycle : $\mathcal{H}_x \sim Rm\mathcal{H}_z \sim Rm\epsilon h_2 \sim \sqrt{Rm\epsilon}h_1 \sim \sqrt{Rm\epsilon^2}\mathcal{H}_x$. Au seuil, le gain de ce cycle est de l'ordre de 1, si bien que $Rm \sim \epsilon^{-4}$.

Le même mécanisme permet d'expliquer la dynamo étudiée par Busse et Wicht, en remplaçant la modulation de perméabilité magnétique par une modulation de conductivité électrique. Ainsi, sur la figure 3a de leur article, on observe une divergence du nombre de Reynolds magnétique critique en ϵ^{-4} . Cette divergence suit donc la loi d'échelle prévue par notre mécanisme.

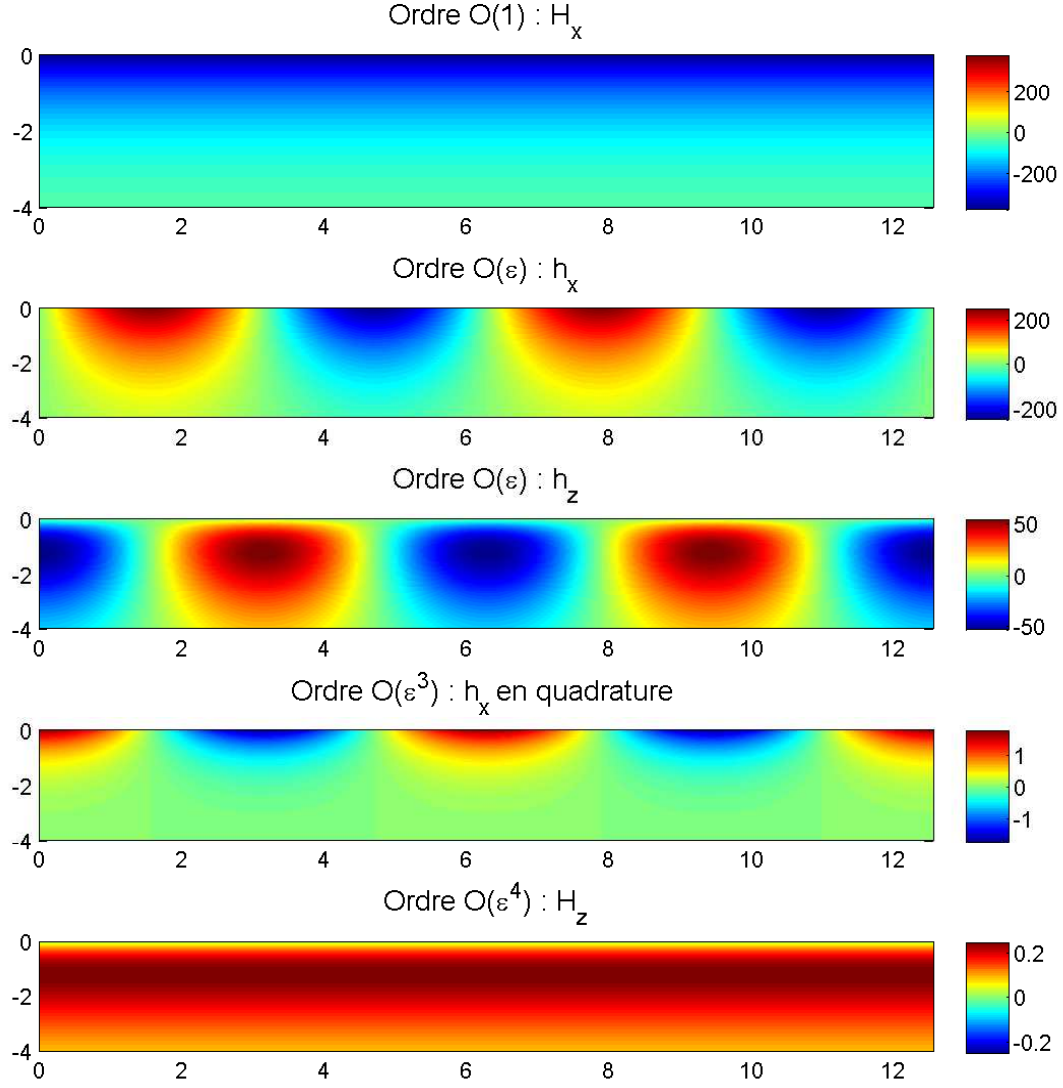


FIGURE 4.9 – Mode neutre dans la limite $D \rightarrow \infty$, puis $\alpha \rightarrow \infty$: le champ \mathcal{H}_x (en haut) créé avec la modulation de perméabilité une composante d'ordre $\mathcal{O}(\epsilon)$ (lignes 2 et 3), qui est advectée par le fluide en une composante $\mathcal{O}(\epsilon/\sqrt{Rm})$ (ligne 4), qui avec la modulation de perméabilité crée du champ grande échelle \mathcal{H}_z (en bas), d'ordre $\mathcal{O}(\epsilon^2/\sqrt{Rm})$. Le cisaillement en $z = 0$ régénère alors le champ \mathcal{H}_x par effet ω .

4.3.5 Retour sur les théorèmes anti-dynamo

Il est frappant de constater combien l'écoulement utilisé pour réaliser la dynamo est simple. En l'absence de modulation de perméabilité, il existe un théorème anti-dynamo qui dit qu'un écoulement cartésien dont une des composantes de vitesse est nulle ne peut réaliser l'effet dynamo [30]. L'équivalent en coordonnées cylindriques s'appelle le théorème de Cowling : il n'existe pas de champ magnétique dynamo parfaitement axisymétrique. Une version plus générale de ce théorème est démontrée dans Ivers et al. [31] : même si l'on suppose le fluide compressible et le champ magnétique dépendant du temps, et même si la conductivité électrique et la perméabilité magnétique dépendent de l'espace, tout en restant axisymétriques, il ne peut y avoir de champ magnétique dynamo axisymétrique. Ce résultat semble pouvoir s'étendre sans difficulté aux coordonnées cartésiennes, en prenant la limite d'un rayon de courbure infini : si le champ de vitesse, la conductivité électrique, la perméabilité magnétique, et le champ magnétique sont indépendants d'une même coordonnée cartésienne, le champ magnétique ne peut être maintenu par effet dynamo.

Nous contournons donc le premier théorème anti-dynamo en imposant une variation de perméabilité magnétique, et le deuxième en supposant que le champ magnétique dépend des trois coordonnées d'espace. Cependant, nous avons vu que dans la limite $D \rightarrow \infty$, le mode le plus instable a $k_c = 0$, ce qui semble en contradiction avec le théorème de Ivers. En réalité, pour que le théorème s'applique il faut que le système ait une taille finie et soit entouré d'isolant. Quand $D \rightarrow \infty$, on contourne les hypothèses du théorème en supposant le système infini dans les trois directions. Nous avons tracé sur la figure 4.7 la courbe $Rm_c(k)$ donnée par (4.29) pour différentes valeurs de D : pour toute valeur finie de D , $R\tilde{m}_c$ tend vers l'infini quand $k \rightarrow 0$. Cependant, quand D devient grand, la courbe s'écrase contre l'axe des ordonnées, et converge simplement vers une courbe qui admet une limite finie en $k = 0$. On peut comprendre ce phénomène de la manière suivante : le théorème anti-dynamo assure que l'amplification du champ magnétique tend vers zéro quand $k \rightarrow 0$. Si le système a une taille finie suivant z , les gradients de champ magnétique gardent une amplitude finie, et les courants correspondants sont dissipés par effet Joule. En revanche, si le système est infini, il peut apparaître une perturbation magnétique ayant des gradients arbitrairement faibles : la dissipation comme l'amplification tend vers 0 quand $k \rightarrow 0$. Lorsque k est très faible mais non nul, ce mode marginalement stable devient instable pour peu que l'écoulement soit suffisamment vigoureux. Si l'on prend la double limite $k = 0$ et $D = +\infty$, un champ selon x et indépendant de z (et y) n'est associé à aucun courant électrique, et est donc marginalement stable.

4.3.6 Réponse sous-harmonique

Le système d'équations que nous avons résolu est un problème linéaire dont les coefficients dépendent périodiquement de la coordonnée x . Nous n'avons considéré pour l'instant qu'une réponse harmonique de ce système. Or, lorsqu'un paramètre d'une équation linéaire est modulé périodiquement en temps, le système peut présenter une instabilité paramétrique, dont la fréquence est inférieure ou égale à celle du forçage. L'exemple le plus simple d'un tel système est un pendule dont le point d'attache est déplacé sinusoidalement selon la verticale : le pendule voit alors une gravité effective modulée périodiquement, qui peut exciter paramétriquement une oscillation du pendule. Si la modulation paramétrique est proche du double de la fréquence propre du pendule, ce dernier va osciller à la fréquence moitié de la fréquence de forçage, on dit que la réponse du pendule est sous-harmonique.

On peut donc se demander si, dans le problème présent, la modulation en x de la perméabilité magnétique peut exciter un mode instable qui aurait une fréquence spatiale inférieure à celle de

cette modulation. La résolution générale du système formé par (4.4) et (4.5) se fait en utilisant la théorie de Floquet, ou de manière équivalente le théorème de Bloch : on cherche alors des solutions sous la forme

$$H_x = e^{iQx} \tilde{H}_x \quad (4.39)$$

$$H_z = e^{iQx} \tilde{H}_z \quad (4.40)$$

où \tilde{H}_x et \tilde{H}_z sont des fonctions 2π périodiques en x , et Q est un nombre réel. Ce nombre permet de fixer la périodicité souhaitée pour le mode propre final. Par exemple, si l'on veut une solution 4π périodique en x , il faut prendre $Q = 1/2$. On insère alors la décomposition précédente dans les équations (4.4) et (4.5), et on résout les équations obtenues pour les fonctions (2π périodiques) \tilde{H}_x et \tilde{H}_z . Nous avons effectué cette résolution, et nous n'avons pas trouvé de mode instable, et ce même pour des valeurs du nombre de Reynolds magnétique très élevées. Il semble donc que les modes sous-harmoniques soient beaucoup plus stables que les modes harmoniques. Ceci peut s'expliquer par le fait que la réponse harmonique est couplée à un champ grande échelle, indépendant de x , alors que la réponse sous harmonique ne peut pas être couplée à un tel champ. Considérons en effet un champ ψ qui contiendrait une composante indépendante de x et une composante sous-harmonique :

$$\psi(x, z) = \psi_0(z) + \tilde{\psi}_{1/2}(x, z)e^{ix/2} \quad (4.41)$$

où $\tilde{\psi}_{1/2}$ est une fonction 2π périodique de x . Effectuons une translation $x \rightarrow x + 2\pi$, le mode propre devient :

$$\psi'(x, z) = \psi_0(z) - \tilde{\psi}_{1/2}(x, z)e^{ix/2} \quad (4.42)$$

Cette translation laisse le système de départ invariant, donc ψ' est mode propre du même système, pour la même valeur propre. En effectuant la somme et la différence de ψ et ψ' , on obtient que les composantes indépendante de x et sous-harmonique en x sont découplées. Ainsi, la réponse sous-harmonique ne peut pas bénéficier du couplage avec un champ à grande échelle, qui lui est peu amorti par les termes diffusifs.

Ceci se comprend bien en reprenant l'analogie avec le pendule forcé paramétriquement : si le pendule est forcé paramétriquement au voisinage du double de sa fréquence propre, la réponse sera une oscillation sous-harmonique et symétrique par rapport à 0. Si en revanche le pendule est forcé paramétriquement au voisinage de sa fréquence propre, il va osciller à cette fréquence propre, mais il fera en moyenne temporelle un angle non nul avec la verticale. Le pendule présente donc soit une réponse sous-harmonique, de moyenne temporelle nulle, soit une réponse harmonique, qui est génériquement couplée à l'harmonique 0, et qui a donc une moyenne temporelle non nulle.

4.4 Pertinence de ce mécanisme pour la dynamo VKS

S'il est intéressant de mettre en évidence un mécanisme pour engendrer du champ magnétique à partir d'une modulation de perméabilité magnétique, ce mécanisme apparaît pour l'instant relativement peu efficace, et les valeurs du Rm critique annoncées sont bien trop élevées. Pour les faibles modulations de perméabilité, et pour une expérience de laboratoire, les vitesses mises en jeu au seuil peuvent atteindre une fraction parfois non négligeable de la vitesse de la lumière ! Si l'on module fortement la perméabilité, le seuil est de l'ordre de 10^3 quand α vaut environ une centaine. Pour une expérience de taille $L = 5cm$ dans du sodium liquide, la vitesse critique du fluide serait alors de l'ordre du kilomètre par seconde, ce qui est bien évidemment hors de portée d'une expérience de laboratoire.

Il va sans dire que ce mécanisme ne peut donc pas être appliqué en l'état à la dynamo VKS. Cependant, nous allons voir qu'au prix de petites modifications, le seuil peut être abaissé drastiquement, jusqu'à atteindre des valeurs tout à fait comparables au seuil de la dynamo VKS.

4.4.1 Cisaillement fini en $z = 0$

Un premier raffinement consiste à prendre en compte l'extension spatiale du cisaillement dans la direction verticale. En effet, les seuils annoncés précédemment sont très élevés, et la profondeur de peau est donc très faible, en $Rm_c^{-1/2}$. Il n'est donc pas dit du tout que la couche de cisaillement de vitesse soit très faible devant cette épaisseur de peau ! On considère donc l'autre limite, pour laquelle le cisaillement s'étend jusqu'à l'infini, ce qui correspond à un champ de vitesse $\vec{u} = (Sz, 0, 0)$. Le nombre de Reynolds magnétique est alors défini à l'aide du cisaillement : $Rm = \mu_0 \sigma SL^2$. Pour un mode de Fourier $\vec{B}(z)e^{st+iqx+iky}$, l'équation d'induction s'écrit :

$$d_{zz}B_z - (s + q^2 + k^2 + iqRmz)B_z = 0 \quad (4.43)$$

$$d_{zz}B_x - (s + q^2 + k^2 + iqRmz)B_x = -RmB_z \quad (4.44)$$

La solution qui tend vers zéro quand z tend vers l'infini est :

$$B_x^{(q)} = -a_q \frac{Rm^{1/3}}{(iq)^{2/3}} \text{Ai}'(F_q(z)) + b_q \text{Ai}(F_q(z)) \quad (4.45)$$

$$B_z^{(q)} = a_q \text{Ai}(F_q(z)) \quad (4.46)$$

où Ai et Ai' désignent respectivement la fonction d'Airy et sa dérivée, et :

$$F_q(z) = \frac{s + k^2 + q^2 + iqRmz}{(iqRm)^{2/3}} \quad (4.47)$$

La solution ci-dessus n'est valable que pour $q \neq 0$. Le mode de Fourier $q = 0$ est traité indépendamment et donne :

$$B_x^{(0)} = \frac{a_0 Rm}{2\sqrt{s+k^2}} z e^{-\sqrt{s+k^2}z} + b_0 e^{-\sqrt{s+k^2}z} \quad (4.48)$$

$$B_z^{(0)} = a_0 e^{-\sqrt{s+k^2}z} \quad (4.49)$$

$$(4.50)$$

Dans ces expressions les coefficients (a_q) et (b_q) sont des constantes d'intégration. La continuité de B_z , H_x , H_y , et du champ électrique dirigé selon y , conduit après un calcul sans difficulté aux deux conditions aux limites pour le champ à l'intérieur de la paroi structurée :

$$\partial_z H_x|_{0-}^{(q)} = iqH_z|_{0-}^{(q)} - iq\{\mu_r H_z|_{0-}\}^{(q)} + (iqRm)^{1/3} \frac{\text{Ai}'(F_q(0))}{\text{Ai}(F_q(0))} H_x|_{0-}^{(q)} \quad (4.51)$$

$$\begin{aligned} & - \frac{Rm^{2/3}}{(iq)^{1/3}} \left(F_q(0) - \frac{(\text{Ai}'(F_q(0)))^2}{(\text{Ai}(F_q(0)))^2} \right) \{\mu_r H_z|_{0-}\}^{(q)} \\ \partial_z H_z|_{0-}^{(q)} &= - \left\{ \frac{\mu_r'}{\mu_r} H_x|_{0-} \right\}^{(q)} + (iqRm)^{1/3} \frac{\text{Ai}'(F_q(0))}{\text{Ai}(F_q(0))} \{\mu_r H_z|_{0-}\}^{(q)} \end{aligned} \quad (4.52)$$

pour $q \neq 0$, et pour $q = 0$:

$$\partial_z H_x|_{0-}^{(0)} = -\sqrt{s+k^2} H_x|_{0-}^{(0)} + \frac{Rm}{2\sqrt{s+k^2}} \{\mu_r H_z|_{0-}\}^{(0)} \quad (4.53)$$

$$\partial_z H_z|_{0-}^{(0)} = - \left\{ \frac{\mu_r'}{\mu_r} H_x|_{0-} \right\}^{(0)} - \sqrt{s+k^2} \{\mu_r H_z|_{0-}\}^{(0)} \quad (4.54)$$

Ces nouvelles conditions aux limites remplacent les équations (4.10) et (4.11).

4.4.2 Une dynamo beaucoup plus efficace

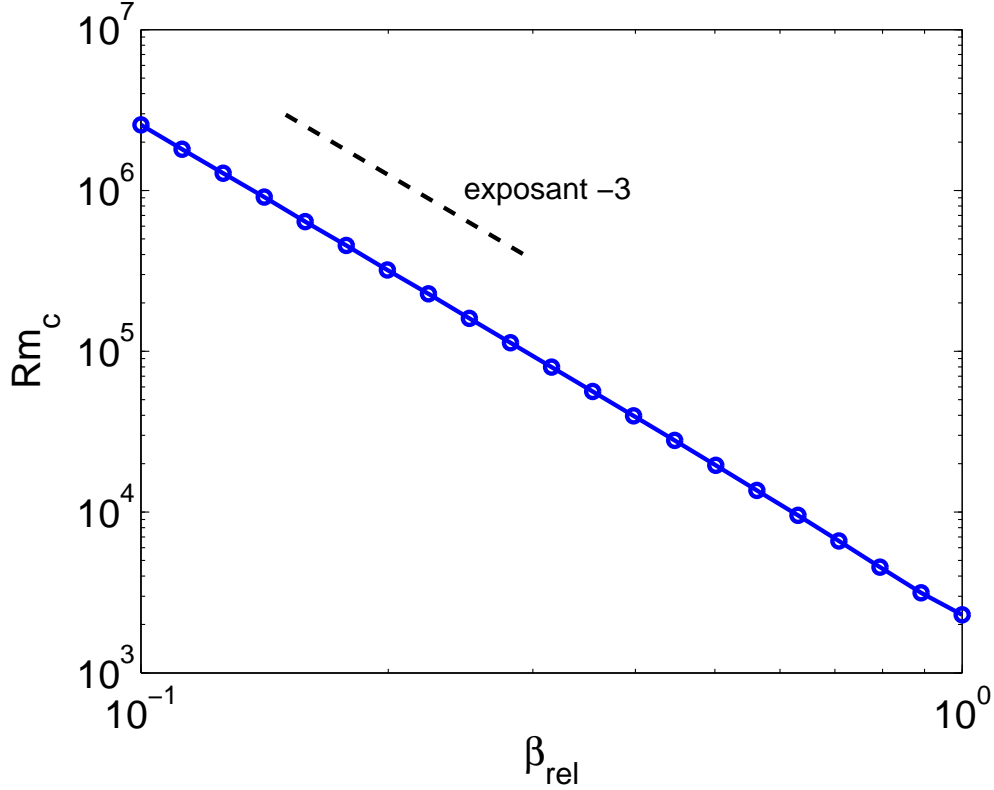


FIGURE 4.10 – Seuil de la dynamo obtenue avec un cisaillement fini dans le fluide, pour $\alpha = 10$ et $D = 1.0$. Le vecteur d'onde critique varie peu en fonction de β_{rel} et garde une valeur proche de 0.6. La pulsation au seuil est comprise en 0.14 à modulation faible et 0.25 à modulation maximale.

On représente sur la figure 4.10 le nombre de Reynolds magnétique critique de la dynamo obtenue avec un cisaillement fini. On constate que le seuil est beaucoup plus bas que lorsque le cisaillement est localisé en $z = 0$. De manière plus intéressante encore, on constate qu'à modulation de perméabilité ϵ faible le seuil diverge en $Rm_c \sim \epsilon^{-3}$. L'exposant de cette divergence passe donc de -4 à -3 lorsque l'on considère un cisaillement fini et non plus localisé en $z = 0$. Ceci vient de la modification de l'effet de peau en présence d'un cisaillement fini. L'argument (4.47) des fonctions d'Airy se comporte à z élevé comme $Rm^{1/3}z$. Ainsi, en présence d'un cisaillement fini, la profondeur de peau n'est plus $Rm^{-1/2}$ mais $Rm^{-1/3}$: le champ magnétique pénètre nettement plus profondément dans le fluide, et l'advection se fait d'autant mieux. Si on reprend le mécanisme décrit précédemment, la deuxième étape devient $h_2 \sim Rm^{-1/3}h_1$, si bien que le bilan du cycle s'écrit : $H_x \sim RmH_z \sim Rm\epsilon h_2 \sim Rm^{2/3}\epsilon h_1 \sim Rm^{2/3}\epsilon^2 H_x$. Le seuil s'obtient toujours quand le gain de ce cycle est d'ordre 1, soit $Rm_c \sim \epsilon^{-3}$. Notons enfin que cette dynamo est oscillante au seuil, avec une pulsation comprise entre 0.14 à modulation faible et 0.25 à modulation maximale. Elle correspond à une onde qui se propage dans la direction y .

Une telle modification de l'effet de peau quand on retire la discontinuité de vitesse se produit également dans la dynamo de Ponomarenko [32] : si l'on considère un écoulement qui présente un saut de vitesse d'amplitude finie, les modes ayant le taux de croissance le plus élevé se développent sur une taille caractéristique $Rm^{-1/2}$ dans les trois directions (radiale, orthoradiale,

et axiale). Si l'on considère maintenant un profil de vitesse continu, cette taille caractéristique devient $Rm^{-1/3}$.

4.4.3 Influence de l'épaisseur D

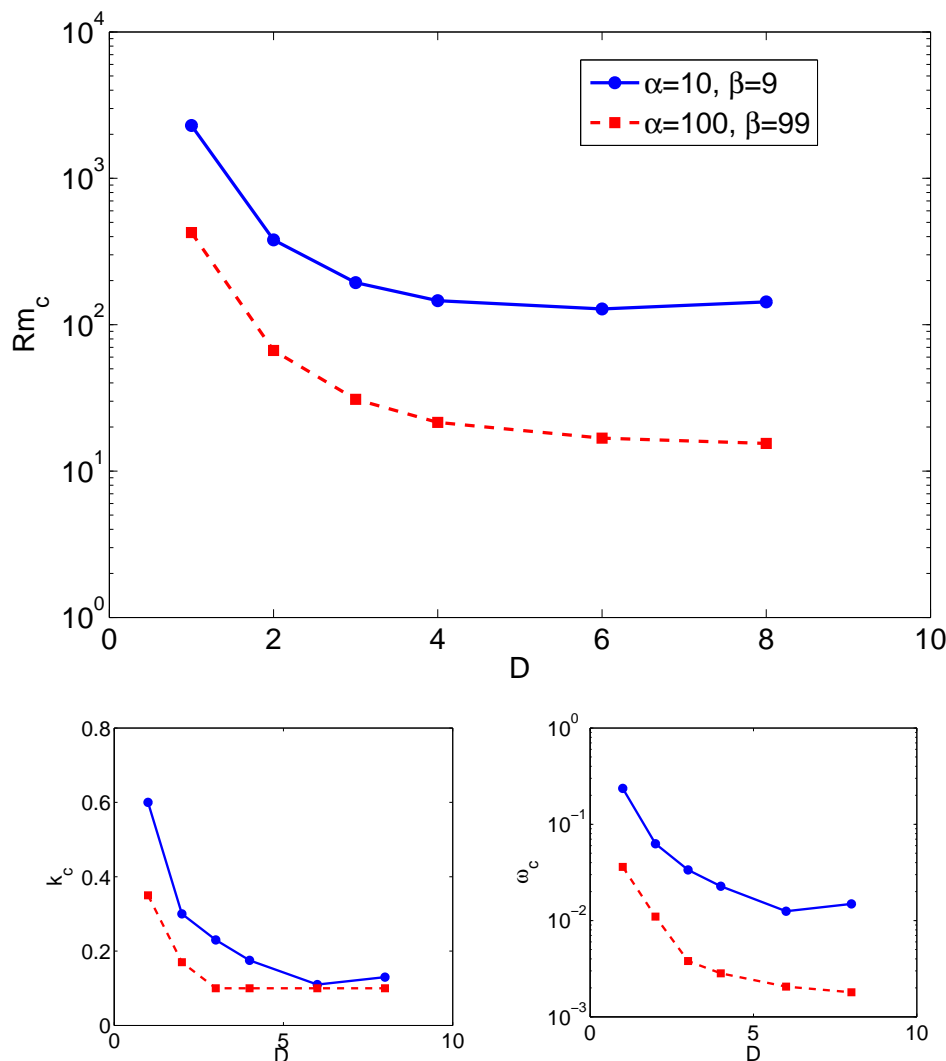


FIGURE 4.11 – Seuil, vecteur d'onde critique, et pulsation au seuil de la dynamo en fonction de l'épaisseur D de la couche de perméabilité variable. Dès $\alpha = 100$ et $D = 2.0$ le seuil atteint des valeurs crédibles pour l'expérience VKS.

L'épaisseur D de la couche de μ_r variable est censée mesurer plus ou moins la hauteur des pales des disques de l'expérience VKS. En bordure de disque, cette hauteur vaut $1/3$ de la distance entre deux pales. On représente sur la figure 4.11 le seuil, le vecteur d'onde critique et la pulsation au seuil de la dynamo en fonction de l'épaisseur D de la couche de μ_r variable. La valeur moyenne de la perméabilité vaut $\alpha = 10$ ou $\alpha = 100$, et la modulation est fixée à sa valeur maximale : $\beta = \alpha - 1$. On constate que le seuil est une fonction rapidement décroissante de D , qui sature vers $D = 6$. Pour $\alpha = 100$, dès $D > 2$ le nombre de Reynolds magnétique critique est inférieur à 80, et donne des valeurs tout à fait acceptables pour une modélisation de la dynamo VKS. Pour $\alpha = 1000$, le seuil est vraisemblablement encore beaucoup plus bas. La dynamo est

oscillante, et correspondrait dans l'expérience VKS à une onde se propageant dans la direction radiale. Cependant, la pulsation de la dynamo tend vers 0 quand α et/ou D augmentent, si bien que le seul passage de la géométrie cartésienne à la géométrie cylindrique pourrait permettre de rendre cette dynamo stationnaire.

Ce mécanisme est donc le premier qui permet d'expliquer le rôle déterminant des pales ferromagnétiques de la dynamo VKS. Dans le paragraphe suivant, on s'intéresse au rôle du disque ferromagnétique sur lequel ces pales sont fixées.

4.4.4 Rôle du disque ferromagnétique

Dans le but d'étudier le rôle du disque ferromagnétique sur lequel sont fixées les pales, on remplace le matériau ferromagnétique en $z < -D$ par un isolant de perméabilité magnétique μ_0 . Dans cet isolant le laplacien du champ magnétique est nul. Un mode de Fourier de vecteurs d'onde q et k respectivement selon x et y a donc une dépendance selon z en $e^{\sqrt{q^2+k^2}z}$. Cette solution est celle qui tend vers 0 quand $z \rightarrow -\infty$. En utilisant la continuité de B_z , H_x et H_y , on peut obtenir la condition aux limites suivante sur le champ à l'intérieur de la paroi structurée, en $z = -D$:

$$\left\{ \frac{\mu_r'}{\mu_r} H_x \right|_{-D+} \}^{(q)} + \partial_z H_z|_{-D+}^{(q)} = \sqrt{k^2 + q^2} \{ \mu_r H_z|_{-D+} \}^{(q)} \quad (4.55)$$

L'autre condition aux limites provient de l'annulation du courant électrique dans la direction z à la frontière avec l'isolant. Elle s'écrit :

$$H_x|_{-D+}^{(q)} = \frac{iq}{\sqrt{q^2 + k^2}} \{ \mu_r H_z|_{-D+} \}^{(q)} \quad (4.56)$$

Cette égalité peut être utilisée pour simplifier la première condition aux limites, afin d'exprimer la dérivée de H_z par rapport à z en $-D^+$ uniquement à l'aide de $H_z|_{-D+}$. Les deux conditions aux limites obtenues permettent de résoudre ce nouveau problème aux valeurs propres.

On compare sur la figure 4.12 le seuil de la dynamo obtenue avec de l'isolant en $z < -D$, à celui obtenu avec du ferromagnétique parfait. Dans le but d'une application à la dynamo VKS, le vecteur d'onde dans la direction y a été fixé à $k = 0.5$. Cette direction serait la direction radiale dans une modélisation de VKS, et l'extension du mode propre dans cette direction est de l'ordre du rayon des disques, lui-même de l'ordre de la distance entre 2 pales. On constate qu'à faible valeur de l'épaisseur D , le seuil est plus bas si on remplace le ferromagnétique par de l'isolant, alors que dès $D > 2.5$ il vaut mieux mettre du ferromagnétique. Ce croisement des courbes obtenues traduit deux effets antagonistes du ferromagnétique :

- La présence de ferromagnétique en $z = -D$ impose d'annuler le champ B_x à cette paroi. Si D est faible, le champ selon x ne peut pas être très important dans la paroi structurée, et la conversion de champ toroidal en champ poloidal s'en trouve limitée.
- Le disque ferromagnétique permet de canaliser le champ dans la direction z . Ainsi, le champ rentre dans le disque en $z = -D$ et ressort où il le souhaite, sans aucun coût en terme de dissipation ohmique. En comparaison, si le disque est isolant, une partie du champ reboucle dans la paroi structurée, au prix d'une dissipation ohmique plus élevée.

Ces effets sont mis en évidence sur la figure 4.13, où l'on compare les champs internes à la paroi obtenus pour $D = 2$ en présence d'un disque isolant ou d'un disque ferromagnétique. On constate effectivement que le champ magnétique plonge dans le disque ferromagnétique pour ressortir une demie période plus loin. Précisons enfin que le mode propre est oscillant, de pulsation très faible, pour un milieu ferromagnétique, tandis qu'il est stationnaire pour un milieu isolant.

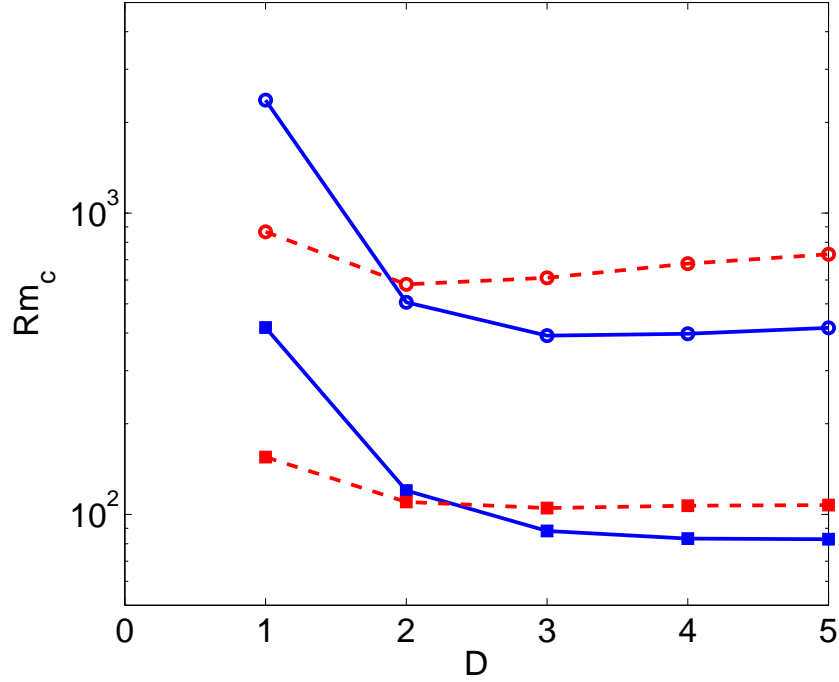


FIGURE 4.12 – Comparaison des seuils dynamo pour un milieu isolant (ligne tiretée) ou ferromagnétique (ligne pleine) en $z < -D$. cercles : $\alpha = 10$ et $\beta = 9$; carrés : $\alpha = 100$ et $\beta = 99$. Le vecteur d'onde selon y est fixé à $k = 0.5$. La dynamo est stationnaire dans le cas d'une paroi isolante, et oscillante, de pulsation très faible, dans le cas d'une paroi ferromagnétique.

Rappelons que lorsque des pales ferromagnétiques sont attachées à un disque en inox, l'expérience VKS ne produit pas de champ magnétique. Cette expérience se trouve a priori plutôt dans la région $D > 2.5$, si bien que la différence de seuil observée sur la figure 4.12 va dans le sens de ces résultats expérimentaux : le seuil est plus élevé si l'on remplace le ferromagnétique par de l'inox, qui peut être considéré comme isolant en première approximation. Néanmoins, la différence de seuil entre un milieu ferromagnétique et un milieu isolant reste faible dans nos prédictions théoriques, et il se peut que le rôle des disques ferromagnétiques de l'expérience VKS soit plus complexe. En particulier, il existe derrière ces disques de l'effet ω qui a le signe contraire de celui présent entre les deux disques. Il est contre-productif et nuit à la dynamo. Le disque ferromagnétique permet alors au champ magnétique de reboucler intégralement dans le disque, sans avoir à traverser cette zone d'effet ω défavorable.

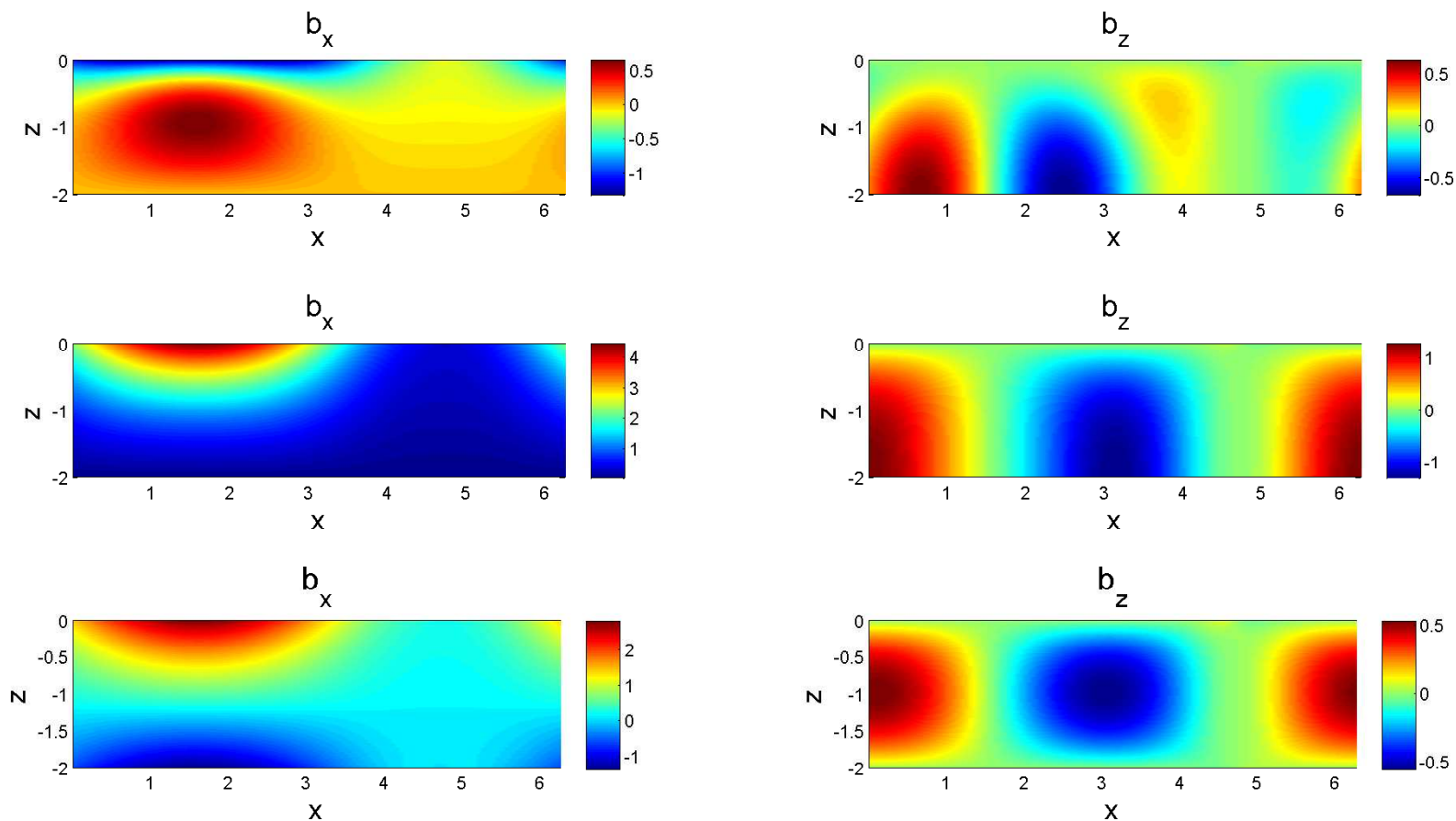


FIGURE 4.13 – Champ magnétique du mode marginalement stable pour $D = 2.0$ et $k = 0.5$. En haut : partie réelle du mode propre avec paroi ferromagnétique. Milieu : partie imaginaire de ce mode propre. En bas : mode propre pour une paroi isolante.

4.A Obtention des matrices du code numérique

4.A.1 Gestion de la dépendance en x

Considérons une fonction de x que l'on décompose sous la forme $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} f_n e^{inx}$. Les multiplications de cette fonction par un sinus et un cosinus s'écrivent :

$$\sin(x)f(x) = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}) \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} f_n e^{inx} = \frac{1}{2i} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} (f_{n-1} - f_{n+1}) e^{inx} \quad (4.57)$$

$$\cos(x)f(x) = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} f_n e^{inx} = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} (f_{n-1} + f_{n+1}) e^{inx} \quad (4.58)$$

On tronque à $n \in \{-N, \dots, N\}$, on note F le vecteur $(f_{-N}, f_{-N+1}, \dots, f_N)$, et on définit les matrices $(2N+1) \times (2N+1)$ de multiplication par un sinus (notée FS) et par un cosinus (notée FC) par :

$$FC = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & 0 \\ 1 & 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad FS = \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} 0 & -1 & & & 0 \\ 1 & 0 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & & & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.59)$$

Les composantes de Fourier de la fonction $\mu_r f(x)$ s'obtiennent en faisant agir l'opérateur $\alpha Id + \beta FS$ sur le vecteur F , multiplier par μ'_r revient à faire agir βFC , et multiplier par μ''_r revient à faire agir $-\beta FS$. Dans ces expressions, Id est la matrice identité de taille $(2N+1) \times (2N+1)$. La dérivée par rapport à x de la fonction f s'obtient en faisant agir l'opérateur diagonal :

$$Dx = \begin{pmatrix} -iN & & & 0 \\ & -i(N-1) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & iN \end{pmatrix} \quad (4.60)$$

4.A.2 Quelques opérateurs du système final

Les opérateurs du système final sont des matrices de taille $(2N+1)^2(2P+1)^2$, qui sont organisées sous la forme de $(2P+1)^2$ blocs de tailles $(2N+1)^2$. On souhaite que les $(P+1)(2N+1)$ premières lignes de l'équation (4.13) représentent l'équation (4.5) décomposée sur les $2N+1$ modes de Fourier en x , puis sur les $P+1$ points de grille de H_z . Les $P(2N+1)$ lignes restantes de l'équation (4.13) représentent l'équation (4.4) décomposée sur les $2N+1$ modes de Fourier en x , puis sur les P points de grille de H_x .

Commençons donc par expliciter quelques matrices d'opérateurs de l'équation (4.5). L'opérateur de dérivation de H_z par rapport à x s'écrit par blocs :

$$DXHZ1 = \begin{pmatrix} & Dx & & \\ 0 & & Dx & \\ & & & \ddots \\ & & & & Dx \end{pmatrix} \quad (4.61)$$

où les blocs Dx sont placés diagonalement dans la sous-matrice formée des $P+1$ premières lignes et $P+1$ dernières colonnes. On définit de même la matrice $MURHZ1$ de multiplication de H_z par μ_r dans l'équation (4.5), en remplaçant les blocs Dx de la matrice $DXHZ1$ par des blocs $\alpha Id + \beta FS$.

Pour l'équation (4.4), on définit la matrice de dérivation de H_x par rapport à x :

$$DXHX2 = \begin{pmatrix} Dx & & & \\ & Dx & & 0 \\ & & \ddots & \\ & & & Dx \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix} \quad (4.62)$$

où les blocs Dx sont placés diagonalement dans la sous-matrice formée des P premières lignes et P premières colonnes. On définit de même la matrice $MURHX2$ (respectivement $MURPRIMHX2$) de multiplication de H_x par μ_r (respectivement μ'_r) dans l'équation (4.4), en remplaçant les blocs Dx de la matrice $DXHX2$ par des blocs $\alpha Id + \beta FS$ (respectivement βFC).

Définissons enfin quelques matrices servant pour les deux équations : MUR , $MURPRIM$, $MURSEC$, DXH , sont les matrices de taille $(2N+1)^2(2P+1)^2$, dont les $(2P+1)$ blocs diagonaux valent respectivement $\alpha Id + \beta FS$, βFC , $-\beta FS$, et Dx . Ces matrices seront utiles pour l'écriture finale des opérateurs : remarquons qu'une dérivée seconde de H_z par rapport à x dans l'équation (4.5) s'obtient en faisant agir l'opérateur $DXH \times DXHZ1$, et non en faisant agir $DXHZ1 \times DXHZ1$!

4.A.3 Opérateur de dérivation par rapport à z

Les dérivées d'une fonction $f(z)$, évaluée en des points régulièrement espacés de dz , peuvent être approximées par :

$$f'(z)|_n \simeq \frac{f^{(n+1)} - f^{(n-1)}}{2dz} \text{ et } f''(z)|_n \simeq \frac{f^{(n+1)} + f^{(n-1)} - 2f^{(n)}}{dz^2} \quad (4.63)$$

Les valeurs aux bords sont obtenues à l'aide des conditions aux limites en faisant intervenir des "points fantômes", c'est-à-dire extérieurs au domaine de calcul. Par exemple, comme H_x s'annule en $z = -D$, on écrit : $u^{(1)} \simeq u^{(-1)}$, donc $\partial_z(H_x)|^{(0)} = u^{(1)}/dz$ et $\partial_z(H_x)|^{(1)} = u^{(2)}/(2dz)$. Les conditions aux limites (4.10) et (4.11) sont un peu plus complexes à traiter. Définissons 4 nouvelles matrices de taille $(2N+1) \times (2N+1)$: la matrice A est diagonale, et a pour coefficients diagonaux $(-\sqrt{s+n^2+k^2+inRm})_{n \in \{-N, \dots, N\}}$. Les matrices B , C , et G , sont définies par :

$$B = Dx - Dx[\alpha Id + \beta FS] + Rm[\alpha Id + \beta FS] \quad (4.64)$$

$$C = -[\alpha Id + \beta FS]^{-1} \beta FC \quad (4.65)$$

$$G = A[\alpha Id + \beta FS] \quad (4.66)$$

Les conditions aux limites (4.10) et (4.11) s'écrivent alors :

$$\partial_z H_x|_{0-} = AH_x|_{0-} + BH_z|_{0-} \quad (4.67)$$

$$\partial_z H_z|_{0-} = CH_x|_{0-} + GH_z|_{0-} \quad (4.68)$$

Ces relations permettent de déterminer les blocs de bords des matrices de dérivation en z . On aura finalement besoin de la matrice de dérivation dérivée première de H_x par rapport à z , dans

l'équation (4.5) :

$$DZHX1 = \begin{pmatrix} \frac{Id}{dz} & & & & & 0 \\ 0 & \frac{Id}{2dz} & & & & \\ -\frac{Id}{2dz} & 0 & \frac{Id}{2dz} & & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & -\frac{Id}{2dz} & 0 & \frac{Id}{2dz} & \\ & & 0 & 0 & A & B \\ & 0 & & & & 0 \end{pmatrix} \quad (4.69)$$

Les blocs A et B sont placés respectivement en positions $(P+1, P)$ et $(P+1, 2P+1)$.

La matrice de dérivation seconde de H_z par rapport à z , dans l'équation (4.5), s'écrit :

$$DZZHZ1 = \begin{pmatrix} & \frac{-2Id}{dz^2} & \frac{2Id}{dz^2} & & & \\ & \frac{Id}{dz^2} & \frac{-2Id}{dz^2} & \frac{Id}{dz^2} & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & \frac{Id}{dz^2} & \frac{-2Id}{dz^2} & \frac{Id}{dz^2} \\ & \frac{2C}{dz} & & \frac{2Id}{dz^2} & \frac{-2Id}{dz^2} + \frac{2G}{dz} & \\ & & & & & 0 \\ 0 & & & & & 0 \end{pmatrix} \quad (4.70)$$

Le bloc $\frac{2C}{dz}$ est en position $(P+1, P)$, et le bloc $\frac{-2Id}{dz^2} + \frac{2G}{dz}$ est en position $(P+1, 2P+1)$.

La matrice de dérivation seconde de H_x par rapport à z , dans l'équation (4.4), s'écrit :

$$DZZHX2 = \begin{pmatrix} & & & & & & \\ & 0 & & & & & 0 \\ & & \frac{-2Id}{dz^2} & \frac{Id}{dz^2} & & & \\ & & \frac{Id}{dz^2} & \frac{-2Id}{dz^2} & \frac{Id}{dz^2} & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & \frac{Id}{dz^2} & \frac{-2Id}{dz^2} & \frac{Id}{dz^2} \\ & & & & \frac{2Id}{dz^2} & \frac{-2Id}{dz^2} + \frac{2A}{dz} & \frac{2B}{dz} \end{pmatrix} \quad (4.71)$$

Le bloc $\frac{-2Id}{dz^2} + \frac{2A}{dz}$ est en position $(2P+1, P)$, et le bloc $\frac{2B}{dz}$ est en position $(2P+1, 2P+1)$.

4.A.4 Opérateurs complets

On peut alors écrire les opérateurs M_1 , N_1 (respectivement M_2 , N_2) agissant à gauche et à droite dans l'équation (4.5) (respectivement (4.4)) :

$$M_1 = MUR \times MURHZ1 \quad (4.72)$$

$$N_1 = MUR \times DXH \times DXHZ1 - k^2 MURHZ1 + MUR \times DZZHZ1 \\ MURPRIM \times DZHX1 \quad (4.73)$$

$$M_2 = (MUR)^2 \times MURHX2 \quad (4.74)$$

$$\begin{aligned}
N_2 = & (MUR)^2 \times DZZHX2 - k^2 MUR \times MURHX2 + MURSEC \times MURHX2 \\
& - MURPRIM \times MURPRIMHX2 + MUR \times MURPRIM \times DXHX2 \\
& + (MUR)^2 \times DXH \times DXHX2
\end{aligned} \tag{4.75}$$

4.B Expression des conditions aux limites en $z = 0$ dans la limite de faible modulation

La moyenne de la condition aux limites (4.11), dans laquelle on a remplacé le μ_r au dénominateur par α , conduit à :

$$\begin{aligned}
& a \left[-\epsilon(k^2 + \alpha s) \sinh(\sqrt{k^2 + 1 + \alpha s}D) - \alpha\epsilon\sqrt{k^2 + s}\sqrt{k^2 + 1 + \alpha s} \cosh(\sqrt{k^2 + 1 + \alpha s}D) \right] \\
+ & d \left[\alpha\epsilon\sqrt{k^2 + s} \cosh(\sqrt{k^2 + 1 + \alpha s}D) \right] \\
+ & \tilde{H}_z \left[2\sqrt{k^2 + \alpha s} \sinh(\sqrt{k^2 + \alpha s}D) + 2\alpha\sqrt{k^2 + s} \cosh(\sqrt{k^2 + \alpha s}D) \right] = 0
\end{aligned} \tag{4.76}$$

La même relation considérée pour l'harmonique $+1$ (c'est-à-dire en e^{ix}) conduit à :

$$\begin{aligned}
& \tilde{H}_x \left[\epsilon(k^2 + 1 + \alpha s) \sinh(\sqrt{k^2 + \alpha s}D) + \alpha\epsilon\sqrt{k^2 + 1 + iRm + s}\sqrt{k^2 + \alpha s} \cosh(\sqrt{k^2 + \alpha s}D) \right] \\
+ & a \left[-\sqrt{k^2 + 1 + iRm + s} \frac{\alpha\epsilon^2}{2i} \sqrt{k^2 + 1 + \alpha s} \cosh(\sqrt{k^2 + 1 + \alpha s}D) \right] \\
+ & c \left[\sqrt{k^2 + 1 + \alpha s} \sinh(\sqrt{k^2 + 1 + \alpha s}D) + \alpha\sqrt{k^2 + 1 + iRm + s} \cosh(\sqrt{k^2 + 1 + \alpha s}D) \right] \\
+ & d \left[-i\sqrt{k^2 + 1 + \alpha s} \sinh(\sqrt{k^2 + 1 + \alpha s}D) - i\alpha\sqrt{k^2 + 1 + iRm + s} \cosh(\sqrt{k^2 + 1 + \alpha s}D) \right] \\
+ & \tilde{H}_z \left[-i\alpha\epsilon\sqrt{k^2 + 1 + iRm + s} \cosh(\sqrt{k^2 + \alpha s}D) \right] = 0
\end{aligned} \tag{4.77}$$

L'équation pour l'harmonique -1 est la même équation, dans laquelle on remplace les i par des $-i$, tout en laissant s inchangé (bien qu'au seuil s soit imaginaire pur). La moyenne de la condition aux limites (4.10) conduit à la relation :

$$\begin{aligned}
& \tilde{H}_x \left[2\sqrt{k^2 + \alpha s} \left[-\sinh(\sqrt{k^2 + \alpha s}D) - \cosh(\sqrt{k^2 + \alpha s}D) \right] \right] \\
+ & a \left[-Rm\alpha\epsilon\sqrt{k^2 + 1 + \alpha s} \cosh(\sqrt{k^2 + 1 + \alpha s}D) \right] \\
+ & d \left[Rm\alpha\epsilon \cosh(\sqrt{k^2 + 1 + \alpha s}D) \right] \\
+ & \tilde{H}_z \left[2Rm\alpha \cosh(\sqrt{k^2 + \alpha s}D) \right] = 0
\end{aligned} \tag{4.78}$$

L'harmonique $+1$ de la condition aux limites (4.10) donne :

$$\begin{aligned}
& \tilde{H}_x \left[i\epsilon(1 + \alpha s)\sqrt{k^2 + 1 + iRm + s} \sinh(\sqrt{k^2 + \alpha s}D) \right. \\
& \quad \left. + (i(1 + s) - Rm)\alpha\epsilon\sqrt{k^2 + \alpha s} \cosh(\sqrt{k^2 + \alpha s}D) \right] \\
+ & a \left[\left(1 - i\frac{Rm - i}{2}\alpha\epsilon^2 \right) \sqrt{k^2 + 1 + \alpha s} \cosh(\sqrt{k^2 + 1 + \alpha s}D) \right. \\
& \quad \left. + \sqrt{k^2 + 1 + iRm + s} \sinh(\sqrt{k^2 + 1 + \alpha s}D) \right] \\
+ & b \left[-i\sqrt{k^2 + 1 + \alpha s} \cosh(\sqrt{k^2 + 1 + \alpha s}D) - i\sqrt{k^2 + 1 + iRm + s} \sinh(\sqrt{k^2 + 1 + \alpha s}D) \right] \\
+ & c \left[(i(\alpha - 1) - \alpha Rm) \cosh(\sqrt{k^2 + 1 + \alpha s}D) \right] \\
+ & d \left[((\alpha - 1) + i\alpha Rm) \cosh(\sqrt{k^2 + 1 + \alpha s}D) \right] \\
+ & \tilde{H}_z \left[-i\alpha\epsilon(i - Rm) \cosh(\sqrt{k^2 + \alpha s}D) \right] = 0
\end{aligned} \tag{4.79}$$

et l'équation pour l'harmonique -1 est la même équation, dans laquelle on remplace les i par des $-i$, tout en laissant s inchangé.

Chapitre 5

Dynamique d'une circulation grande échelle engendrée par un écoulement cellulaire

Les écoulements de fluides à deux dimensions sont connus pour former des structures cohérentes de grande taille. Ces structures peuvent apparaître par une instabilité à grande échelle lorsque le nombre de Reynolds dépasse une valeur critique [33], ou par une succession de bifurcations au cours desquelles des petites échelles fusionnent pour former de plus grandes structures. En régime turbulent, une cascade inverse d'énergie [34] nourrit ces structures de grande taille à partir d'énergie injectée à petite échelle. Les structures engendrées peuvent persister pendant une très longue durée. Parmi les exemples naturels de structures à grande échelle engendrées dans des écoulements quasi-2D, on peut citer la tache rouge de Jupiter, les grands courants océaniques, ou encore les anticyclones et dépressions visibles sur une carte météorologique.

Le champ de vitesse horizontale de ces écoulements quasi-2D est décrit par l'équation de Navier-Stokes à deux dimensions. Il convient en général d'ajouter à cette équation un terme de friction linéaire pour décrire le frottement visqueux dans la direction verticale. La valeur du coefficient de friction linéaire dépend du système considéré, mais il est en général faible. Néanmoins, il a pour effet d'altérer la stabilité des structures de grande taille. Dans certaines géométries, elles acquièrent alors une dynamique temporelle, et se renversent aléatoirement : l'écoulement est dominé par une circulation à grande échelle, dont le sens de rotation garde un signe constant pendant un temps long, avant de se renverser soudainement. Un exemple expérimental de ce phénomène a été observé par J. Sommeria au milieu des années 80 [35] : un écoulement de mercure est parcouru par un réseau de courants électriques injectés à l'aide de 36 électrodes placées aux noeuds d'un réseau carré. Lorsque l'on applique un champ magnétique vertical, la force de Laplace engendre un réseau carré de tourbillons contra-rotatifs. Si le forçage est suffisamment fort, ce réseau se déstabilise au profit d'une circulation à grande échelle. Si la friction est suffisamment importante, la circulation globale tourne pendant longtemps dans un sens, avant de brusquement se retourner. Ces renversements du sens de rotation de l'écoulement grande échelle se produisent de manière erratique. Depuis lors, des études numériques ont mis en évidence ces renversements [36], sans pour autant leur fournir une explication simple. L'objet de l'étude qui suit est de caractériser plus précisément la dynamique de la circulation globale engendrée par un réseau carré de tourbillons, et en particulier les renversements aléatoires qu'elle peut présenter.

Différents mécanismes d'instabilité ont été mis en évidence pour expliquer la création de grandes échelles dans un écoulement forcé sur une petite taille caractéristique. Si le forçage

est suffisamment anisotrope, l'écoulement peut se déstabiliser selon le mécanisme de "viscosité négative" ([33], [37]). Si l'écoulement est à trois dimensions, l'éventuelle hélicité du forçage peut forcer un écoulement à grande échelle selon un mécanisme analogue à l'effet α en magnétohydrodynamique [38]. Les différentes études citées s'intéressent aux premières bifurcations de l'écoulement laminaire, et aux équations gouvernant la dynamique de l'écoulement à grande échelle engendré au voisinage du seuil d'instabilité. L'objectif du présent chapitre est au contraire de décrire le comportement de cette circulation globale pour les hauts nombre de Reynolds. Nous étudions donc numériquement un exemple simple d'écoulement qui produit une circulation à grande échelle. Nous nous intéressons dans un premier temps à la limite asymptotique de très haut nombre de Reynolds, pour laquelle nous calculons une solution approchée de l'équation de Navier-Stokes à deux dimensions. Ceci permet de mettre en évidence les lois d'échelles qui gouvernent les amplitudes de la circulation globale et des petites échelles avec lesquelles elle coexiste. Dans un second temps, on ajoute un terme de friction linéaire, ce qui produit des renversements de la circulation grande échelle. Contrairement aux exemples étudiés précédemment, ces renversements se font en l'absence de brisure externe de symétrie. De plus, il n'y a pas de justification mathématique claire qui permette d'isoler un petit nombre de modes. Néanmoins, l'étude d'un système de basse dimensionalité nous permet de comprendre le mécanisme par lequel apparaissent les renversements de la circulation grande échelle. Ce mécanisme est ensuite validé par les résultats numériques.

5.1 Position du problème

5.1.1 Equations du mouvement, géométrie du problème et nombres sans dimension

Notons $\tilde{u}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{t})$ le champ de vitesse décrivant le mouvement à deux dimensions d'un fluide incompressible, p la pression, $\tilde{\omega}$ la vorticité associée à cet écoulement, et $\tilde{\psi}$ la fonction de courant. On suppose que le fluide a une densité ρ , et que son mouvement a lieu dans un domaine carré de côté L , si bien que $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in [0, L]^2$. Le fluide est supposé newtonien, avec une viscosité cinématique ν . Il est soumis à une force de friction linéaire notée $-\lambda\tilde{u}$, et est for  en volume. La force appliquée par unité de masse est notée \tilde{f} , et force un réseau carré de n^2 tourbillons. On choisit la forme suivante pour cette force :

$$\tilde{f} = \frac{\tilde{f}}{2} (-\sin(n\pi\tilde{x}/L) \cos(n\pi\tilde{y}/L), \cos(n\pi\tilde{x}/L) \sin(n\pi\tilde{y}/L)) \quad (5.1)$$

où \tilde{f} désigne l'intensité dimensionnelle du forçage. Pour adimensionner les équations, on choisit L comme échelle d'espace et $\sqrt{L/\tilde{f}}$ comme échelle de temps. En notant sans tilde les grandeurs adimensionnées, l'équation de Navier-Stokes pour la fonction de courant prend la forme suivante :

$$\partial_t \Delta\psi + J(\Delta\psi, \psi) = -\frac{1}{Rh} \Delta\psi + \frac{1}{Re} \Delta^2\psi + n\pi \sin(n\pi x) \sin(n\pi y) \quad (5.2)$$

où le jacobien est défini par $J(g, h) = \partial_x g \partial_y h - \partial_y g \partial_x h$. Le nombre de Reynolds est défini par $Re = \frac{\sqrt{\tilde{f}} L^{3/2}}{\nu}$, et l'intensité de la friction linéaire est caractérisée par le nombre sans dimension $1/Rh$, où $Rh = \frac{\rho}{\lambda} \sqrt{\frac{\tilde{f}}{L}}$. Cette dernière notation est issue de l'article de J. Sommeria, dans lequel les forces de friction proviennent des couches de Hartmann.

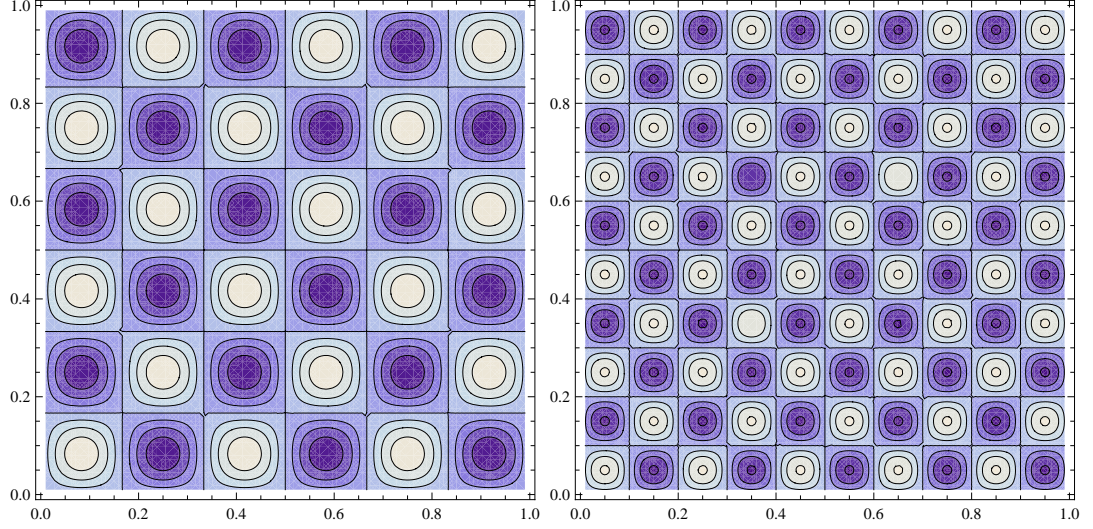


FIGURE 5.1 – Terme de forçage de l'équation (5.2) dans le cas de 6x6 et 10x10 tourbillons (lignes d'isovaleurs, et couleur traduisant l'amplitude du terme).

Dans la suite, on s'intéresse aux propriétés des solutions de cette équation en fonction des paramètres Re , Rh et n . Le terme de forçage de l'équation (5.2) est représenté sur la figure 5.1 pour $n = 6$ et $n = 10$. Le cas $n = 6$ correspond à une géométrie du forçage proche de celle de l'expérience de Sommeria, tandis que le cas $n = 10$ permet d'avoir une plus grande séparation d'échelles entre la taille caractéristique du forçage et la taille caractéristique de la circulation grande échelle.

Pour simplifier l'étude analytique de l'équation (5.2), on supposera que le fluide vérifie des conditions aux limites de type "stress-free" aux bords du domaine. Ces conditions aux limites reviennent à imposer $\psi = 0$ aux quatre côtés du carré.

5.1.2 Méthode de résolution numérique

Afin d'étudier numériquement les solutions de l'équation (5.2), j'ai développé un code numérique semi-spectral : les termes linéaires sont traités de manière implicite dans l'espace de Fourier, tandis que le terme non-linéaire est évalué en repassant dans l'espace réel avant d'effectuer les produits quadratiques en ψ . Une description plus complète peut être trouvée dans l'appendice 5.A. Afin de respecter les conditions aux limites, on se limite aux modes de Fourier de la forme $\sin(p\pi x) \sin(q\pi y)$, avec $(p, q) \in \mathcal{N}^{*2}$, et on écrit :

$$\psi(x, y, t) = \sum_{p=1, q=1}^{p=N, q=N} \psi_{p,q}(t) \sin(p\pi x) \sin(q\pi y) \quad (5.3)$$

où N^2 donne la résolution spatiale de la simulation numérique. Dans les simulations présentées ci-après, on utilise une résolution de 64x64, 128x128 ou 256x256 modes de Fourier. Des tests ont été effectués pour vérifier la bonne convergence de la solution numérique obtenue.

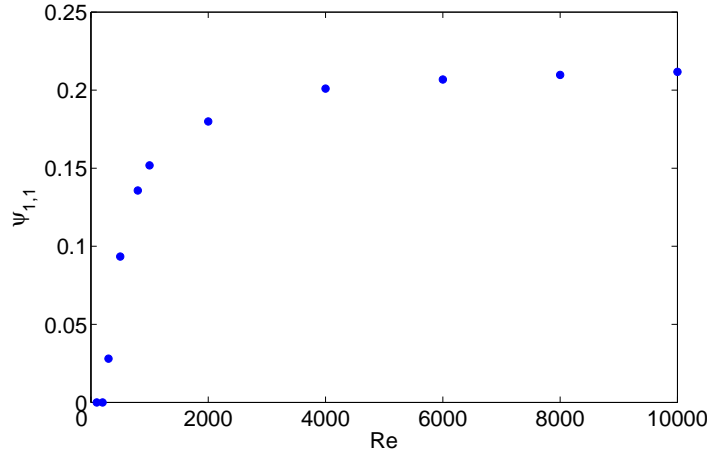


FIGURE 5.2 – Amplitude de la circulation grande échelle en fonction du nombre de Reynolds.

5.2 Etude à Re infini, et observation d'une circulation grande échelle

Dans un premier temps on considère l'équation de Navier-Stokes à deux dimensions sans terme de friction linéaire, c'est-à-dire dans la limite $Re \rightarrow \infty$.

5.2.1 $\psi_{1,1}$ versus Re

L'équation de Navier-Stokes 2D est connue pour présenter en régime (statistiquement) stationnaire une cascade inverse d'énergie pour les vecteurs d'ondes plus petits que celui du forçage : l'énergie remonte progressivement des échelles du forçage jusqu'aux plus grandes échelles de l'écoulement. La loi d'échelle sur le spectre d'énergie cinétique est alors établie à l'aide de la même analyse dimensionnelle que dans le cas de la cascade de Kolmogorov observée à trois dimensions, et l'exposant est donc également $k^{-5/3}$. Afin d'observer cette cascade inverse d'énergie, les numériciens eurent besoin d'ajouter un terme de friction linéaire pour dissiper l'énergie à grande échelle, et empêcher son accumulation dans le mode de Fourier le plus bas. On entend souvent qu'en l'absence de ce terme de friction l'énergie s'accumule sans cesse dans le mode de Fourier de plus grande échelle, jusqu'à ce que la simulation numérique diverge.

Nous avons testé cette hypothèse à l'aide de simulations numériques : un réseau de 36 tourbillons est forcé à haut nombre de Reynolds. Il se déstabilise et engendre finalement une circulation à grande échelle. Dans cet état final l'écoulement est dominé par un grand vortex correspondant au mode de Fourier de plus grande longueur d'onde ($p = 1, q = 1$). Nous avons tracé sur la figure 5.2 l'amplitude $\psi_{1,1}$ de la circulation grande échelle obtenue en régime stationnaire, en fonction du nombre de Reynolds. On constate que la courbe obtenue semble saturer vers une valeur limite à haut nombre de Reynolds : l'écoulement est dominé par une circulation grande échelle, mais l'amplitude de celle-ci sature et ne diverge pas dans le temps.

Sur la figure 5.3 ont été tracées les séries temporelles des trois premiers coefficients de Fourier $\psi_{1,1}$, $\psi_{1,2}$, et $\psi_{2,1}$. La simulation numérique est effectuée à $Re = 6000$. Tandis que $\psi_{1,2}$ et $\psi_{2,1}$ saturent à une valeur proche de zéro, $\psi_{1,1}$ sature à une valeur non nulle. Plus étonnamment encore, la solution de l'équation de Navier-Stokes obtenue semble alors stationnaire ! Les simulations numériques ont été réalisées jusqu'à $Re = 10000$ dans cette géométrie, et conduisent à chaque fois à une solution qui semble stationnaire (les fluctuations relatives de $\psi_{1,1}$ restent alors inférieures à

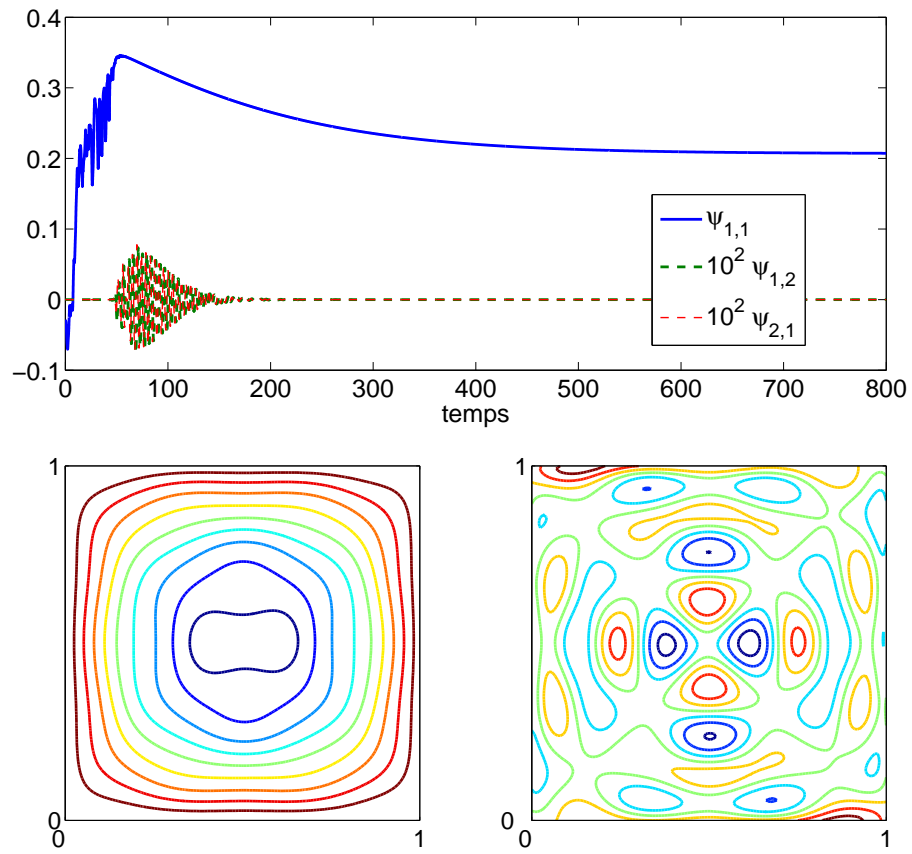


FIGURE 5.3 – Haut : série temporelle des trois modes de Fourier correspondant aux plus grandes échelles de l'écoulement. Bas : isovaleurs de la fonction de courant (gauche) et de la vorticité (droite) de la solution stationnaire atteinte aux temps longs. La simulation a été effectuée à $Re = 6000$.

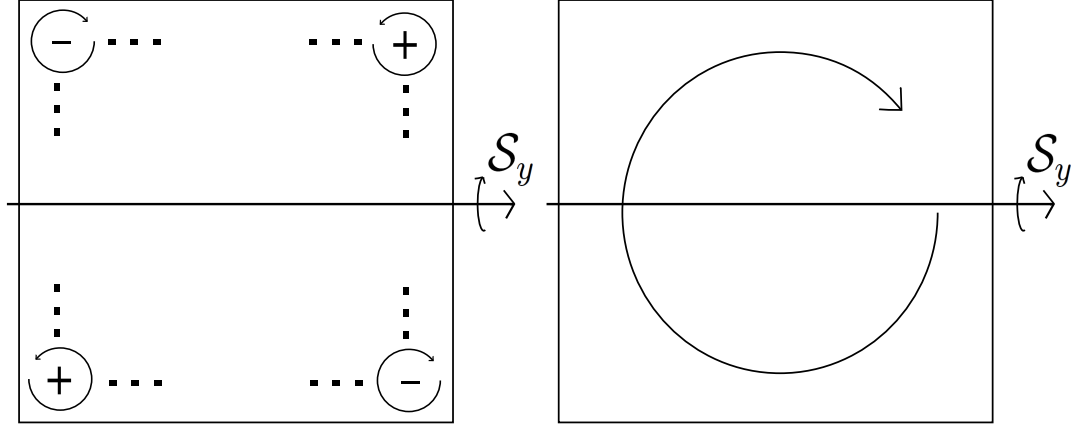


FIGURE 5.4 – Pour n pair, le forçage est symétrique par la transformation \mathcal{S}_y (gauche), tandis que la circulation grande échelle est antisymétrique (droite).

0.02%). L'existence de cette solution stationnaire va contre l'idée que l'énergie du mode de plus grande échelle diverge dans le temps. Nous avons également représenté la fonction de courant et la vorticité de cette solution stationnaire : on constate que la fonction de courant est dominée par la circulation grande échelle, tandis que le champ de vorticité est structuré à l'échelle du forçage.

5.2.2 Calcul analytique de la solution stationnaire

On souhaite comprendre l'origine de cette solution stationnaire à l'aide de considérations analytiques. Nous allons exploiter la séparation d'échelles entre le forçage et l'écoulement grande échelle, ainsi que la différence de symétrie entre ces deux champs.

Hypothèses et considérations de symétrie

Commençons par décomposer la fonction de courant en 2 composantes :

$$\psi = \psi_0 + \xi \quad (5.4)$$

ψ_0 est la circulation à grande échelle. On suppose que, dans le régime stationnaire, cette circulation correspond à une condensation de l'énergie cinétique dans le mode Fourier le plus bas : on notera alors $\psi_0 = \lambda \sin(\pi x) \sin(\pi y)$. L'objectif de ce qui suit est de calculer l'amplitude λ de la circulation grande échelle en régime stationnaire.

Le champ ξ est "le reste de la fonction de courant", il contient essentiellement des modes de Fourier à l'échelle du forçage, mais pas uniquement. ψ_0 vérifie des conditions aux limites homogènes aux bords du domaine, et ξ doit vérifier ces mêmes conditions aux limites.

Considérons maintenant la réflexion par rapport à l'axe $y = 1/2$, notée \mathcal{S}_y et représentée sur la figure 5.4 : le forçage est invariant par cette opération (pour n pair), tandis que la circulation grande échelle change de sens sous cette réflexion. On dira donc que le forçage est symétrique par \mathcal{S}_y tandis que la circulation grande échelle est antisymétrique. On rappelle que la fonction de courant est un pseudo-scalaire et qu'elle se transforme différemment du champ de vitesse, si bien que les appellations "symétriques" et "antisymétriques" font ici référence à la symétrie du champ de vitesse considéré.

On pose alors $\xi = \xi_s + \xi_a$, où ξ_s est la partie de ξ qui est symétrique par \mathcal{S}_y , et ξ_a sa partie antisymétrique. On introduit la décomposition (5.4) dans l'équation (5.2), on cherche une

solution stationnaire, et on identifie les parties symétriques et antisymétriques :

$$J(\Delta\psi_0, \xi_a) + J(\Delta\xi_a, \psi_0) + J(\Delta\xi_a, \xi_a) + J(\Delta\xi_s, \xi_s) = n\pi \sin(n\pi x) \sin(n\pi y) + \frac{1}{Re} \Delta^2 \xi_s \quad (5.5)$$

$$J(\Delta\psi_0, \xi_s) + J(\Delta\xi_s, \psi_0) + J(\Delta\xi_a, \xi_s) + J(\Delta\xi_s, \xi_a) = \frac{1}{Re} \Delta^2 \psi_0 + \frac{1}{Re} \Delta^2 \xi_a \quad (5.6)$$

Le terme $J(\Delta\psi_0, \psi_0)$ est nul, puisque $\Delta\psi_0$ est une fonction de ψ_0 .

Une famille de solutions de l'équation d'Euler

On s'intéresse dans un premier temps à la solution des équations (5.5) et (5.6) dans la limite inviscide, c'est-à-dire à nombre de Reynolds infini. L'équation (5.6) n'a alors plus de second membre, et admet alors la solution triviale $\xi_s = 0$. En remplaçant dans l'équation (5.5) on obtient alors :

$$J(\Delta\psi_0, \xi_a) + J(\Delta\xi_a, \psi_0) + J(\Delta\xi_a, \xi_a) = n\pi \sin(n\pi x) \sin(n\pi y) \quad (5.7)$$

L'idée est alors la suivante : la fonction de courant est dominée par la circulation grande échelle ψ_0 , mais la vorticité est dominée par les petites échelles et donc par ξ_a . Cette intuition provient naturellement des images issues des simulations numériques que nous avons représentées sur la figure 5.3, et a pour conséquence que l'équilibre de l'équation (5.7) se fait à l'ordre le plus bas entre le terme $J(\Delta\xi_a, \psi_0)$ et le forçage.

Ces considérations pourraient être mises en évidence à l'aide d'un développement en échelles multiples et d'un choix approprié des échelles des différentes composantes de ψ . Cependant, ce choix arbitraire d'échelles ne serait pas plus justifié que les considérations d'ordre de grandeur que nous avons ici, et serait lui aussi uniquement motivé par l'observation des résultats de simulations numériques. De plus, nous souhaitons éviter autant que possible toute la technicité des développements en échelles multiples. Nous reviendrons sur les lois d'échelles vérifiées par les différentes composantes de l'écoulement à la fin du calcul.

Une fois que la composante principale de ξ_a est calculée à partir de l'équation :

$$J(\Delta\xi_a, \psi_0) = n\pi \sin(n\pi x) \sin(n\pi y), \quad (5.8)$$

les éventuelles corrections non-linéaires d'ordres supérieurs pourraient être calculées. Cependant, dans la limite de grande séparation d'échelles la solution de l'équation (5.8) est suffisante pour décrire correctement le champ de vorticité. La circulation grande échelle étant proportionnelle à λ , le champ ξ_a est lui en λ^{-1} . Toute valeur de λ est acceptable à cette étape du calcul, et on obtient ainsi une famille de solutions approchées de l'équation d'Euler à deux dimensions. La sélection d'une valeur de λ au sein de cette famille s'effectue par l'intermédiaire de la viscosité.

Sélection de l'amplitude de la circulation par la viscosité

On suppose maintenant que le fluide a une viscosité arbitrairement faible, ou encore que le nombre de Reynolds est arbitrairement grand. En revenant à l'équation (5.6) on constate que ξ_s est maintenant forcé par le terme $\frac{1}{Re} \Delta^2 \xi_a$. On s'attend donc à observer un champ ξ_s non nul, forcé à petite échelle, et inversement proportionnel au nombre de Reynolds. L'équilibre dominant de l'équation (5.6) est alors :

$$J(\Delta\xi_s, \psi_0) = \frac{1}{Re} \Delta^2 \xi_a \quad (5.9)$$

On s'intéresse maintenant à l'évolution temporelle de la circulation grande échelle. L'équation (5.6) montre que cette circulation est freinée par le terme $\frac{1}{Re} \Delta^2 \psi_0$. Le terme $J(\Delta\psi_0, \xi_s) +$

$J(\Delta\xi_s, \psi_0)$ a une projection nulle sur le mode $\sin(\pi x) \sin(\pi y)$. Ainsi, le seul terme qui peut forcer la circulation grande échelle et compenser sa dissipation visqueuse est $J(\Delta\xi_a, \xi_s) + J(\Delta\xi_s, \xi_a)$. Si l'on suppose une évolution lente de λ au voisinage de sa position d'équilibre, l'équation gouvernant cette évolution s'obtient en définissant une moyenne spatiale :

$$\langle f \rangle = \int_{x=0}^{x=1} \int_{y=0}^{y=1} f(x, y) dx dy, \quad (5.10)$$

en ajoutant la dépendance temporelle de λ à l'équation (5.6), et en prenant sa moyenne après projection sur le mode grande échelle :

$$d_t \lambda = \frac{2}{\pi^2} \langle [J(\xi_s, \Delta\xi_a) + J(\xi_a, \Delta\xi_s)] \sin(\pi x) \sin(\pi y) \rangle - 2\pi^2 \lambda / Re \quad (5.11)$$

Le premier terme du membre de droite fait intervenir deux intégrales qui se simplifient à l'aide de la relation :

$$\langle a(x, y) J(b(x, y), c(x, y)) \rangle = - \langle b(x, y) J(a(x, y), c(x, y)) \rangle \quad (5.12)$$

valable si deux des trois fonctions a , b et c s'annulent aux bords du domaine. On obtient donc :

$$\begin{aligned} \langle J(\xi_a, \Delta\xi_s) \sin(\pi x) \sin(\pi y) \rangle &= - \langle \xi_a J(\sin(\pi x) \sin(\pi y), \Delta\xi_s) \rangle = -\frac{1}{\lambda} \langle \xi_a J(\psi_0, \Delta\xi_s) \rangle \\ &= \frac{1}{\lambda} \langle \xi_a \frac{1}{Re} \Delta^2 \xi_a \rangle = \frac{1}{Re \lambda} \langle (\Delta\xi_a)^2 \rangle \end{aligned} \quad (5.13)$$

où l'on a utilisé l'équation (5.9), puis une intégration par partie. De même, le fait que le forçage soit monochromatique, donc proportionnel à son laplacien, permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \langle J(\xi_s, \Delta\xi_a) \sin(\pi x) \sin(\pi y) \rangle &= - \langle \xi_s J(\sin(\pi x) \sin(\pi y), \Delta\xi_a) \rangle = -\frac{1}{\lambda} \langle \xi_s J(\psi_0, \Delta\xi_a) \rangle \\ &= \frac{1}{\lambda} \langle \xi_s n \pi \sin(n \pi x) \sin(n \pi y) \rangle \\ &= \frac{-1}{2n^2 \pi^2 \lambda} \langle \Delta\xi_s n \pi \sin(n \pi x) \sin(n \pi y) \rangle \\ &= \frac{-1}{2n^2 \pi^2 \lambda} \langle \Delta\xi_s J(\Delta\xi_a, \psi_0) \rangle = \frac{1}{2n^2 \pi^2 \lambda} \langle \Delta\xi_a J(\Delta\xi_s, \psi_0) \rangle \\ &= \frac{1}{2n^2 \pi^2 \lambda Re} \langle \Delta\xi_a \Delta^2 \xi_a \rangle \end{aligned} \quad (5.14)$$

La solution stationnaire de l'équation (5.11) correspond finalement à une circulation :

$$\lambda_s = \frac{1}{\pi} \left[\langle (\Delta(\lambda_s \xi_a))^2 \rangle + \frac{1}{2n^2 \pi^2} \langle \Delta(\lambda_s \xi_a) \Delta^2(\lambda_s \xi_a) \rangle \right]^{1/4} \quad (5.15)$$

Cette valeur théorique de la circulation grande échelle s'exprime donc uniquement à l'aide de la fonction la fonction $\lambda_s \Delta\xi_a$, qui est une fonction indépendante de λ_s et solution de l'équation (5.8). Cette dernière équation peut être résolue analytiquement, ce qui donne une expression exacte pour la valeur de λ_s . Les détails du calcul sont fournis en appendice.

On peut d'ores et déjà faire quelques remarques importantes sur ce résultat :

- La solution a été obtenue en linéarisant les équations autour d'une solution connue du problème sans forçage ni viscosité : $\lambda \sin(\pi x) \sin(\pi y)$. En ajoutant le forçage et la viscosité, la conservation de l'énergie sur le mode grande échelle se traduit par l'équation (5.11) qui sélectionne l'amplitude de la circulation.

- Cette solution a été obtenue en calculant ξ_a et ξ_s à l'ordre le plus bas. Or ξ_s est inversement proportionnelle au nombre de Reynolds, et est donc plus faible que ξ_a de plusieurs ordres de grandeur. En particulier, ξ_s est plus petit que les nombreuses corrections non linéaires que l'on aurait pu ajouter à ξ_a . Il est intéressant de constater que l'utilisation de la symétrie \mathcal{S}_y nous a permis d'aller chercher le terme ξ_s , responsable de la sélection de λ , bien qu'il soit beaucoup plus faible que les nombreuses corrections non linéaires de ξ_a que nous avons négligées.
- Il est également surprenant de constater que la viscosité sélectionne une amplitude de la circulation grande échelle indépendante de la viscosité! En effet, le terme de forçage de la circulation grande échelle est inversement proportionnel au nombre de Reynolds, et il en est de même pour le terme visqueux. Quand ces deux termes s'équilibrent, λ est donc indépendant de Re . Ainsi, à haut nombre de Reynolds, l'amplitude de la circulation grande échelle sature à λ_s , et ce indépendamment du nombre de Reynolds.

Les équations (5.8) et (5.9) peuvent être résolues analytiquement à l'aide d'un changement de variable. Ce calcul est présenté dans l'appendice 5.B et fournit les expressions des laplaciens de ξ_s et ξ_a . Ces laplaciens peuvent être inversés numériquement pour obtenir ξ_s et ξ_a .

Dans la sous-section suivante nous comparons les résultats analytiques aux résultats des simulations numériques.

5.2.3 Comparaison calcul-simulations

Comme nous l'avons décrit précédemment, on obtient une solution quasiment stationnaire à haut Reynolds quand on force un réseau de 6x6 tourbillons. Cependant, lorsque l'on force un réseau de 10x10 tourbillons, la solution est instable à haut Reynolds : la circulation grande échelle présente une dynamique complexe qui implique des phases de déstabilisation suivies de phases de relaminarisation. Lors de ces phases de relaminarisation le système passe près du point fixe calculé précédemment : on peut ainsi comparer le résultat des simulations numériques aux calculs analytiques.

Amplitude du tourbillon grande échelle

Le calcul présenté en appendice donne accès à $\Delta\xi_a$. Les différentes intégrales permettant d'obtenir λ_s sont calculées à l'aide de Mathematica. Nous représentons la valeur théorique de la circulation grande échelle obtenue en fonction du nombre de tourbillons n caractéristique du forçage sur la figure 5.5. On constate que l'amplitude de la circulation croît comme la racine carrée de n .

Dans le cas d'un forçage comportant 6x6 tourbillons, la valeur obtenue est de 0.316. La courbe représentée sur la figure 5.2 semble saturer à une valeur de l'ordre de 0.22. Il y a donc un écart de l'ordre de 40% entre la valeur prédite par la théorie et la valeur observée dans les simulations numériques. On pourrait espérer que cet écart diminue lorsque l'on augmente la séparation d'échelles entre le forçage et la circulation grande échelle. Cependant, pour un forçage composé de 10x10 tourbillons, la valeur prédite est de l'ordre de 0.418, tandis que la valeur observée à la fin d'une phase laminaire est de l'ordre de 0.25, soit un écart de l'ordre de 50%. On peut envisager différentes explications pour l'écart observé entre théorie et simulation numérique :

- La circulation grande échelle ne correspond pas exactement à une condensation d'énergie dans le mode de Fourier le plus bas. Ainsi sa structure spatiale est un peu différente de $\sin(\pi x) \sin(\pi y)$. Il s'ensuit une modification de ξ_a et de ξ_s , donc de λ .

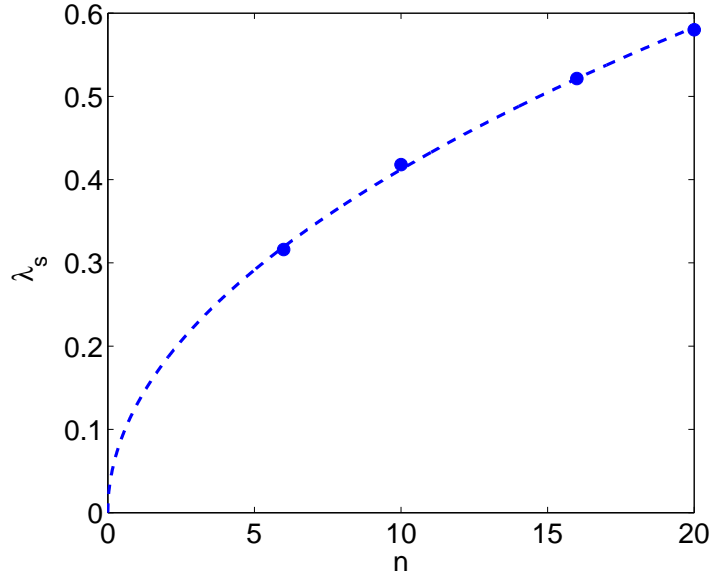


FIGURE 5.5 – Amplitude théorique de la circulation à grande échelle, en fonction du nombre de tourbillons de forçage par côté du carré. La ligne tiretée est un ajustement en racine carrée.

- Les termes non linéaires restent importants. Il faudrait alors ajouter des corrections non linéaires à ξ_a pour espérer obtenir une valeur théorique de λ plus proche de la valeur observée. Cependant, les développements en série de solutions de problèmes non linéaires sont souvent divergents, si bien qu'ajouter un terme supplémentaire au développement ne fait parfois qu'empirer les choses.
- La solution stationnaire calculée est instable au profit d'une autre solution, stationnaire elle aussi, et qui vérifie les mêmes lois d'échelles.

En pratique la circulation grande échelle issue des simulations numériques est une fonction de $\sin(\pi x) \sin(\pi y)$, mais n'est pas juste proportionnelle à cette quantité. Il est possible que la séparation d'échelle ne soit pas assez grande pour que le calcul précédent soit parfaitement valable.

Structure de l'écoulement à petite échelle

Sur la figure 5.6 est représentée la partie antisymétrique du champ de vorticité issue de la simulation numérique, et celle issue du calcul analytique. Plus précisément, nous comparons la partie antisymétrique de $\psi_{1,1} \Delta \psi$ au champ $\lambda \Delta \xi_a$ calculé analytiquement. La comparaison est effectuée pour un forçage comprenant 6x6 et 10x10 tourbillons.

On constate tout d'abord que, qualitativement, les structures à petite échelle de l'écoulement sont très bien reproduites par la solution analytique. L'accord quantitatif est relativement bon, mais la vorticité de la solution analytique est légèrement trop faible vers le centre du domaine, et légèrement trop importante près des bords et dans les coins du carré. Ces écarts sont de l'ordre de 25%, et peuvent également avoir pour origine la légère différence entre la structure spatiale du mode grande échelle et la structure idéalisée en $\sin(\pi x) \sin(\pi y)$ utilisée pour le calcul.

La partie symétrique de l'écoulement issu de la simulation numérique est très largement dominée par la circulation grande échelle, et la très légère correction ξ_s , d'ordre Re^{-1} , est trop faible pour être détectée. Néanmoins, la structure du champ ξ_s issu du calcul est intéressante. Ce champ est représenté sur la figure 5.7 pour les deux forçages considérés. On constate qu'il

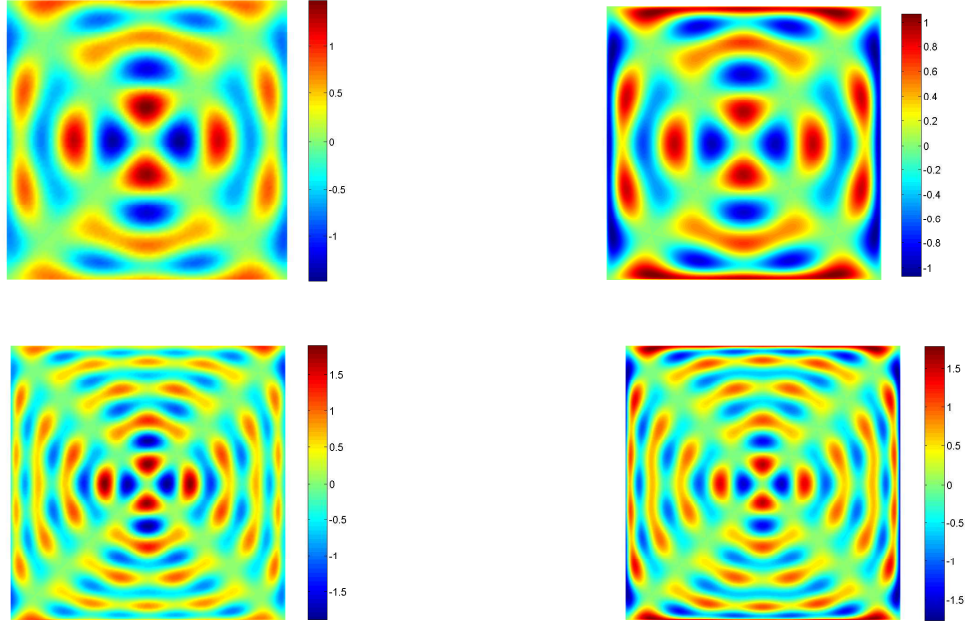


FIGURE 5.6 – Structure du champ de vorticité à petite échelle : partie antisymétrique du champ $\psi_{1,1}\Delta\psi$ de la solution stationnaire forcée par 6x6 tourbillons, issue d’une simulation numérique effectuée à $Re = 6000$ (haut gauche), et champ $\lambda\Delta\xi_a$ calculé théoriquement (haut droite). En bas, même chose pour un forçage comportant 10x10 tourbillons, en fin de phase relaminarisée, à $Re = 10000$.

est formé de quatre tourbillons présents dans les quatre coins du carré. Ainsi, le forçage de la circulation grande échelle se fait par une interaction non linéaire entre les petites échelles engendrées par les quatre tourbillons de coin du forçage.

On comprend alors mieux l’origine de l’écart entre la solution théorique et l’écoulement observé dans la simulation numérique : La partie antisymétrique ξ_a de l’écoulement est légèrement trop élevée près des coins du carré en comparaison avec la simulation numérique. Ainsi, ξ_a et ξ_s sont trop grands dans les coins, et le forçage du mode $\sin(\pi x)\sin(\pi y)$ est un peu surévalué. C’est pour cette raison que la valeur calculée de λ est supérieure à la valeur issue de la simulation numérique.

Retour sur les différentes lois d’échelles

La structure du champ ξ_a nous permet de préciser les différentes lois d’échelles intervenant dans le calcul de la solution stationnaire. Le petit paramètre est n^{-1} . La figure 5.6 nous montre que, en un point donné, le champ ξ_a est à petite échelle dans une direction et à grande échelle dans l’autre. Il possède donc une dérivée d’ordre $\mathcal{O}(1)$ et l’autre d’ordre $\mathcal{O}(n)$. De plus, on constate que c’est dans la direction parallèle au champ de vitesse de l’écoulement grande échelle que la dérivée est d’ordre $\mathcal{O}(1)$. Ainsi, si l’on note $\vec{V}_0 \sim \lambda$ le champ de vitesse correspondant à l’écoulement grande échelle et \vec{v}_a celui correspondant à ξ_a , l’équilibre qui fixe ξ_a s’écrit :

$$(\vec{V}_0 \cdot \vec{\nabla})\vec{v}_a \sim \text{forçage} \quad (5.16)$$

où la dérivée de \vec{v}_a dans la direction de \vec{V}_0 est d’ordre $\mathcal{O}(1)$. En utilisant $\vec{v}_a \sim n\xi_a$ et forçage = $\mathcal{O}(1)$ (ce forçage a une dérivée spatiale de moins que celui qui intervient dans l’équation (5.2),

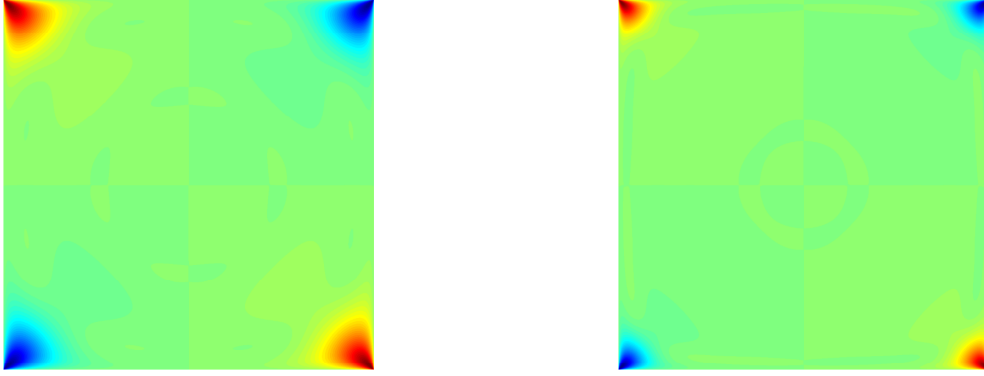


FIGURE 5.7 – Partie symétrique ξ_s de la fonction de courant à petite échelle. Gauche : forçage comprenant 6x6 tourbillons. Droite : forçage comprenant 10x10 tourbillons. Dans les deux cas ξ_s est localisé au niveau des tourbillons présents aux quatre coins du carré.

qui elle est une équation pour la vorticité), on obtient finalement $\lambda n \xi_a \sim 1$. L'amplitude de la circulation λ_s est alors fixée par l'équation (5.15), qui conduit à $\lambda \sim (\lambda^2 n^4 \xi_a^2)^{1/4}$. En utilisant les deux dernières relations, on obtient les lois d'échelles :

$$\lambda \sim n^{1/2} \quad (5.17)$$

$$\xi_a \sim n^{-3/2} \quad (5.18)$$

La dépendance de λ_s en \sqrt{n} est bien mise en évidence sur la figure 5.5. On peut alors vérifier a posteriori que les différentes approximations sont valables. En particulier le terme non linéaire $J(\Delta \xi_a, \xi_a)$ peut être évalué en remarquant que $\partial_x(\Delta \xi_a) \partial_y(\xi_a) \sim \partial_y(\Delta \xi_a) \partial_x(\xi_a) \sim n \Delta \xi_a \xi_a$, puisque ξ_a possède une dérivée grande dans une direction et petite dans l'autre. Ainsi, $J(\Delta \xi_a, \xi_a) \sim n^3 \xi_a^2 \sim 1$, si bien que ce terme est effectivement négligeable devant le terme de forçage de l'équation (5.8), qui lui est d'ordre $\mathcal{O}(n)$.

Les différents équilibres en jeu dans la sélection de la solution stationnaire sont finalement résumés sur le schéma 5.8. On y représente en colonnes les harmoniques de Fourier considérées. Les processus physiques en jeu sont indiqués sur les flèches, et les équilibres ont lieu là où se rencontrent deux flèches. L'ordre des termes correspondants à cet équilibre dans l'équation 5.2 est alors indiqué au point de rencontre. Par exemple, l'advection de ξ_a , qui contient des harmoniques élevées d'ordres impairs, par ψ_0 , d'harmonique $(1; 1)$, produit l'harmonique $(n; n)$ qui compense le forçage à l'ordre $\mathcal{O}(n)$.

Dissipation d'énergie

On s'intéresse également à la dissipation d'énergie en régime stationnaire. Cette quantité a été étudiée par de nombreux auteurs dans le cas d'une turbulence 2D ou 3D. Ces études s'effectuent par le biais de simulations numériques ou de calculs théoriques. Si une étude théorique ne permet pas de déterminer la dissipation à haut Reynolds, certaines techniques permettent de borner cette quantité [39]. Une borne supérieure et une borne inférieure ont été déterminées dans le cas qui nous intéresse d'une turbulence 2D engendrée par un forçage monochromatique. Le

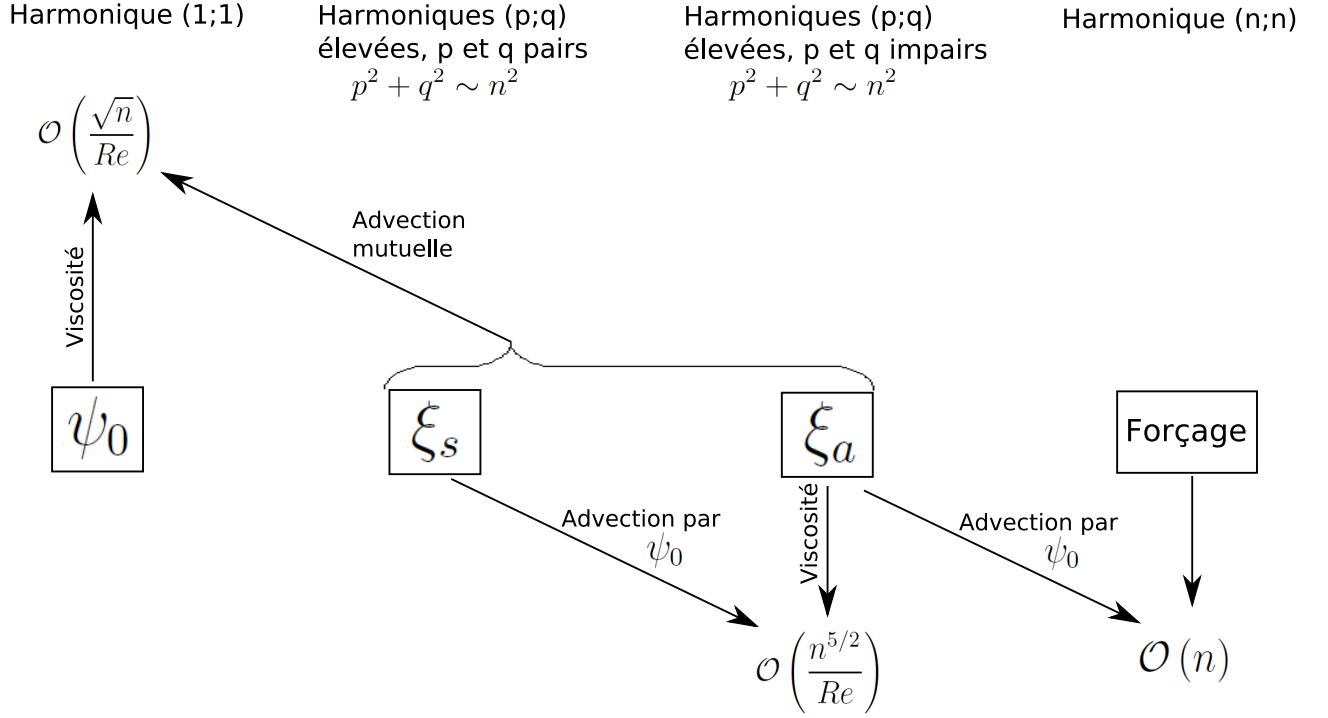


FIGURE 5.8 – Représentation schématique du calcul de la solution stationnaire (voir texte).

calcul théorique effectué précédemment permet également d'estimer la dissipation d'énergie de la solution stationnaire.

Alexakis et Doering utilisent dans leur étude un nombre de Reynolds différent de celui utilisé par Sommeria, et défini à l'aide de la vitesse quadratique moyenne de l'écoulement. On définit alors :

$$Re^{(U)} = \frac{U}{\nu k_f} \quad (5.19)$$

où $U = \sqrt{\langle |\tilde{u}|^2 \rangle}$ est la vitesse quadratique moyenne, et k_f est défini par $-\tilde{\Delta} \tilde{f} = k_f^2 \tilde{f}$ ($k_f = \sqrt{2n\pi}/L$ pour le forçage d'un réseau carré de n tourbillons de côté). La dissipation d'énergie est alors adimensionnée par $k_f U^3$ et prend alors la forme :

$$\beta = \frac{\nu |\tilde{\nabla} \tilde{u}|^2}{k_f U^3} = \frac{\nu \langle \tilde{\omega}^2 \rangle}{k_f U^3} \quad (5.20)$$

Ces grandeurs peuvent être reliées aux grandeurs considérées précédemment de la manière suivante :

$$Re^{(U)} = \frac{Re}{\sqrt{2n\pi}} \sqrt{\langle |\tilde{u}|^2 \rangle} \quad (5.21)$$

$$\beta = \frac{\langle (\Delta \psi)^2 \rangle}{\sqrt{2n\pi} Re \langle |\tilde{u}|^2 \rangle^{3/2}} \quad (5.22)$$

où toutes les grandeurs de ces deux dernières équations sont sans dimension.

La solution laminaire, pour laquelle le terme visqueux équilibre le forçage, est une solution du problème à tout nombre de Reynolds. Cependant, cette solution est instable à haut Reynolds au profit de la solution étudiée précédemment. Alexakis et Doering ont borné la dissipation β .

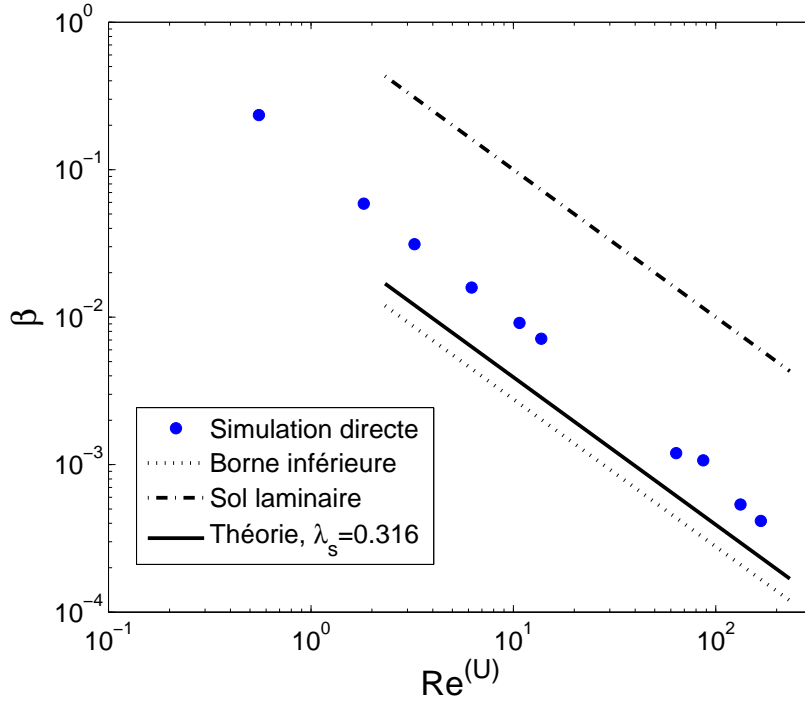


FIGURE 5.9 – Dissipation d’énergie en fonction du nombre de Reynolds construit à partir de la vitesse quadratique moyenne $Re^{(U)}$.

La borne supérieure est la dissipation de l’écoulement laminaire, et la borne inférieure provient d’une inégalité de Poincaré :

$$\frac{1}{n^2 Re^{(U)}} < \beta < \frac{1}{Re^{(U)}} \quad (5.23)$$

Sur la figure 5.9 sont représentées les différentes bornes, ainsi que les points issus des simulations numériques. Nous avons ajouté également la dissipation de la solution théorique $\psi \simeq \psi_0 + \xi_a$ calculée précédemment. Cette dissipation est tracée pour l’amplitude λ_s de la circulation grande échelle calculée théoriquement. On constate que les points issus de la simulation se situent bien entre les deux bornes calculées. A haut Reynolds, la solution issue du calcul théorique prévoit une dissipation de l’ordre de 50% de la valeur réelle.

5.2.4 Stabilité de la solution stationnaire

Nous avons déjà évoqué le fait que la solution stationnaire engendrée par un forçage de 10×10 tourbillons perd sa stabilité à trop haut nombre de Reynolds. La circulation grande échelle présente alors des phases turbulentes suivies de phases de relaminarisation. Une autre manière de déstabiliser la solution stationnaire consiste à ajouter une friction linéaire. Lorsque Rh diminue, la friction est de plus en plus forte et limite l’accumulation d’énergie vers les grandes échelles du système. La circulation globale perd alors sa stabilité et acquiert une dépendance temporelle. Pour des frictions plus fortes encore, elle présente des renversements aléatoires qui sont l’objet de la prochaine partie.

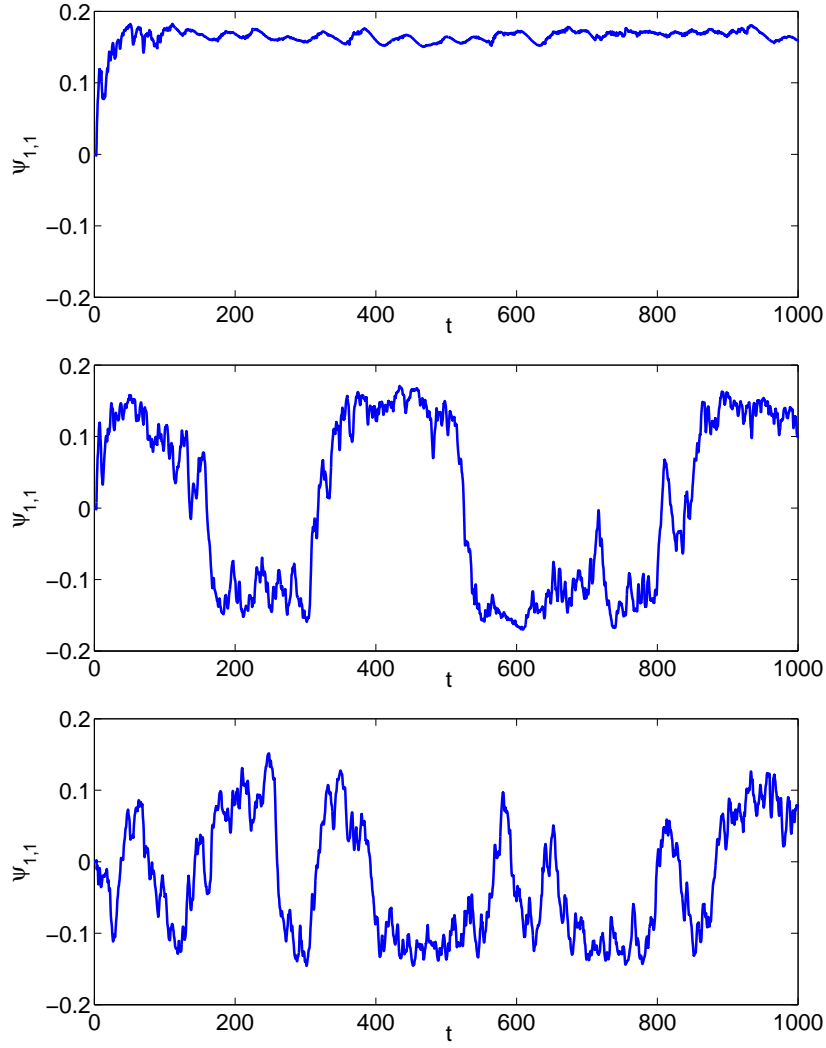


FIGURE 5.10 – Amplitude de la circulation grande échelle en fonction du temps. Les renversements sont de plus en plus fréquents quand Rh diminue. De haut en bas : $Rh = 70$, $Rh = 55$, et $Rh = 40$.

5.3 Renversements de la circulation grande échelle

5.3.1 Effet de la friction

Sur la figure 5.10 sont représentées des séries temporelles de l'amplitude de la circulation grande échelle pour 3 valeurs de Rh , lorsque l'on force 6x6 tourbillons à $Re = 2000$. On constate qu'à Rh élevé la circulation grande échelle a un comportement chaotique, mais garde une polarité donnée et correspond donc à un écoulement qui tourne toujours dans le même sens. Lorsque Rh diminue, on observe de longues phases dans une polarité donnée, séparées par des renversements soudains de l'amplitude de la circulation. Les renversements apparaissent donc pour une valeur critique de Rh , de l'ordre de 70, et sont d'autant plus fréquents que Rh est inférieur à cette valeur.

Une image de la fonction de courant et du champ de vorticité dans une polarité donnée est fournie sur la figure 5.11. On distingue toujours une certaine séparation d'échelle entre ces deux champs.

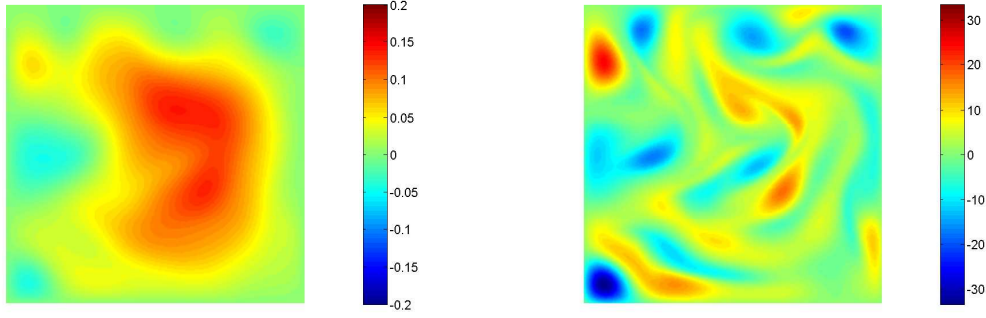


FIGURE 5.11 – Fonction de courant et champ de vorticité obtenus lors d’une simulation à $Re = 2000$ et $Rh = 50$.

5.3.2 Modélisation par un système dynamique simple

Dans le but de modéliser le plus simplement possible la dynamique de renversement observée, on considère les symétries du problème de départ, puis on isole les composantes de la fonction de courant qui se transforment différemment sous ces symétries. Le système considéré est invariant par réflexion par rapport à la droite $x = 1/2$, et par réflexion par rapport à la droite $y = 1/2$. On note respectivement ces deux symétries \mathcal{S}_x et \mathcal{S}_y . On conserve alors 3 modes principaux dans la fonction de courant :

- L’amplitude de la circulation grande échelle est notée D et est évaluée par $\psi_{1,1}$, le coefficient de Fourier sur $\sin(\pi x) \sin(\pi y)$ de la fonction de courant. Cette composante de l’écoulement grande échelle est impaire sous l’action de \mathcal{S}_x ou \mathcal{S}_y .
- Une deuxième composante, notée Q_x , est la partie de l’écoulement grande échelle qui est quadrupolaire dans la direction x . Elle est paire sous l’action \mathcal{S}_x et impaire sous l’action de \mathcal{S}_y . On l’évaluera grâce à $\psi_{2,1}$, le coefficient de Fourier sur $\sin(2\pi x) \sin(\pi y)$ de la fonction de courant.
- Une troisième composante, notée Q_y , est la partie de l’écoulement grande échelle qui est quadrupolaire dans la direction y . Elle est paire sous l’action \mathcal{S}_y et impaire sous l’action de \mathcal{S}_x . On l’évaluera grâce à $\psi_{1,2}$, le coefficient de Fourier sur $\sin(\pi x) \sin(2\pi y)$ de la fonction de courant.

Un système dynamique qui couple ces trois amplitudes doit respecter les symétries du problème de départ, et doit donc être invariant sous l’action de \mathcal{S}_x ou \mathcal{S}_y . Un système simple qui vérifie ces contraintes est :

$$\dot{D} = -\nu D - Q_x Q_y \quad (5.24)$$

$$\dot{Q}_x = +Q_x - Q_y D - Q_x^3 \quad (5.25)$$

$$\dot{Q}_y = \mu Q_y + D Q_x \quad (5.26)$$

Nous avons choisi de mettre le moins de non-linéarités d’ordre trois possible : seule celle en $-Q_x^3$ est nécessaire, afin d’empêcher une croissance non bornée de Q_x . Des séries temporelles issues de ce système sont représentées sur la figure 5.12 pour $\mu = 4.0$ et différentes valeurs de ν . La composante D se renverse aléatoirement lorsque ν dépasse une valeur critique $\nu_c = 1.6659$.

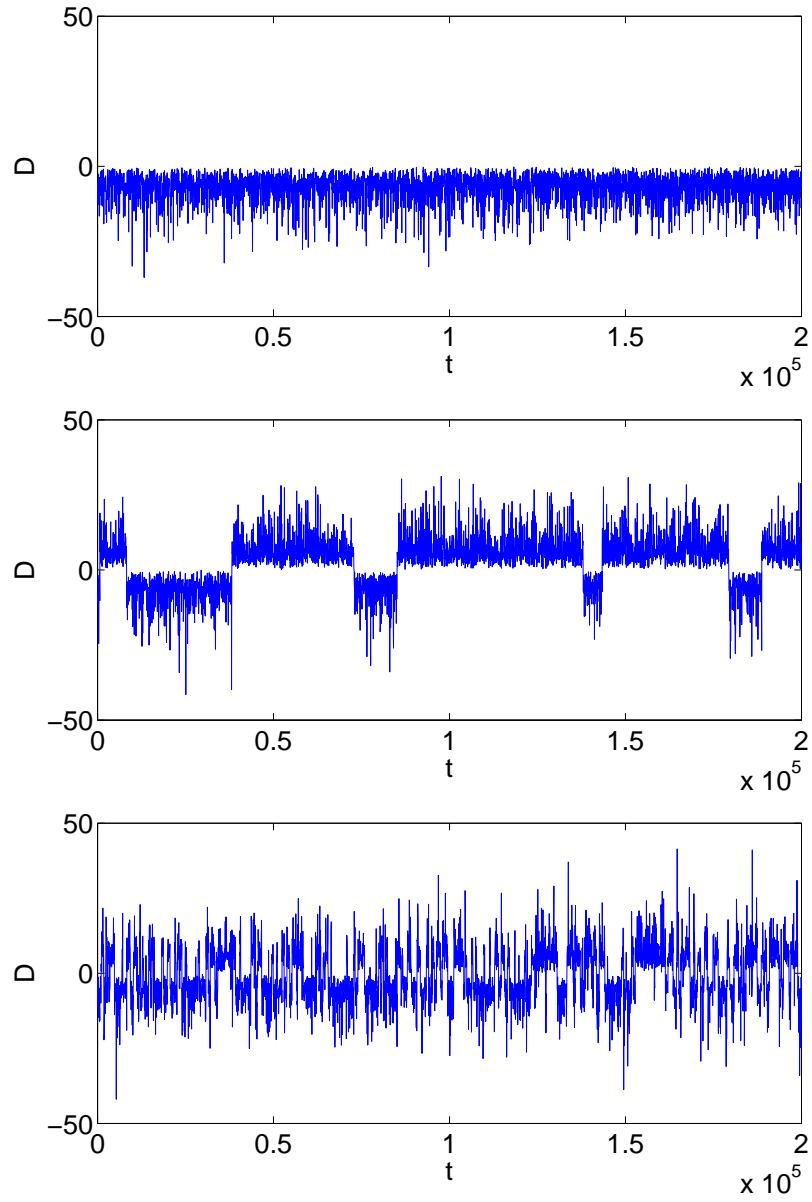


FIGURE 5.12 – Series temporelles de la variable D du système dynamique, pour $\mu = 4.0$ et respectivement $\nu = 1.665$, $\nu = 1.666$, et $\nu = 1.668$.

Remarquons que le système dynamique étudié peut également représenter la dynamique du champ magnétique dynamo d'un objet astrophysique. En effet, si l'on appelle D un mode dipolaire de champ magnétique, Q un mode quadrupolaire et V la partie de l'écoulement au sein de l'astre qui brise la symétrie équatoriale, les contraintes imposées par \mathcal{S}_x et \mathcal{S}_y dans le problème présent sont les mêmes que celles imposées par la symétrie équatoriale et par $\vec{B} \rightarrow -\vec{B}$ dans le problème magnétique. Ainsi, on peut représenter des renversements de champ magnétique à l'aide du système dynamique écrit précédemment, à condition d'effectuer la substitution $D \rightarrow D$, $Q_x \rightarrow V$ et $Q_y \rightarrow Q$. Les renversements du système dynamique précédent peuvent alors être compris simplement à partir de notre étude de deux modes couplés de champ magnétique : lorsque deux modes de champ magnétique sont couplés par une brisure de symétrie imposée, ils peuvent avoir une dynamique de renversements au voisinage d'une bifurcation noeud-col. Dans le système dynamique, comme dans l'étude de Navier-Stokes à deux dimensions, aucune brisure de symétrie externe n'est imposée. Par contre, la composante Q_x , équivalente à V pour le problème magnétique, est instable et choisit spontanément un signe. Dans un système pour lequel aucune brisure de symétrie n'est imposée de l'extérieur, c'est donc une brisure de symétrie spontanée, apparaissant par instabilité, qui est responsable du couplage des modes. Ce système dynamique a donc de nombreux points communs avec un système dynamique étudié par Gissinger et al. [40] pour modéliser des renversements issus d'une étude numérique de l'expérience VKS. Ce dernier a simulé l'expérience VKS dans un régime de symétrie brisée ($F_1 \neq F_2$), et a donc considéré un système dynamique qui couple D , Q et V , dans lequel la brisure de symétrie V est forcée par un terme constant. En résumé, les deux systèmes dynamiques sont issus d'une interaction de triades [41], obtenue en n'écrivant que les termes linéaires et quadratiques, à laquelle ont été ajoutés :

- Dans le cas de Gissinger et al., un terme constant qui force la brisure de symétrie.
- Dans le cas du modèle présent, un coefficient linéaire positif dans l'équation pour Q_x , qui engendre une brisure spontanée de symétrie par instabilité, et un terme d'ordre trois pour saturer cette instabilité.

Le scénario d'apparition des renversements dans le système dynamique s'appelle l'intermittence de crise [42] : en dessous du seuil, le système dynamique possède deux attracteurs chaotiques disjoints, qui correspondent aux deux polarités possibles, ou encore aux deux signes possibles de D . Au franchissement du seuil, un attracteur collisionne avec le bassin d'attraction du second, ce qui a pour effet de connecter ces deux attracteurs. Du fait de la symétrie du problème de départ, lorsque l'attracteur 1 touche le bassin d'attraction de l'attracteur 2, l'attracteur 2 touche également le bassin d'attraction de l'attracteur 1. Près du seuil, très peu de trajectoires du premier attracteur sont connectées au second : le système passe une très longue durée dans le premier attracteur et soudain bascule vers le second, ce qui produit un renversement. Les renversements sont donc très rares au voisinage du seuil. Lorsque l'on s'éloigne du seuil, de plus en plus de trajectoires connectent les deux attracteurs, et les renversements sont plus fréquents. Afin d'illustrer ce scénario, on représente sur la figure 5.13 les deux attracteurs de l'espace des phases pour $\nu < \nu_c$. On représente également un renversement obtenu pour ν légèrement au-dessus du seuil. On constate que la trajectoire du renversement connecte bien les deux attracteurs chaotiques. En pratique, les symétries du problème de départ imposent au moins quatre "types" de renversements :

- Des renversements de $D > 0$ à $D < 0$ en passant par $Q_x > 0$.
- Des renversements de $D > 0$ à $D < 0$ en passant par $Q_x < 0$. Le signe de Q_x correspond dans le problème magnétique au signe de la brisure de symétrie de vitesse.
- Des renversements de $D < 0$ à $D > 0$ en passant par $Q_x > 0$.
- Des renversements de $D < 0$ à $D > 0$ en passant par $Q_x < 0$.

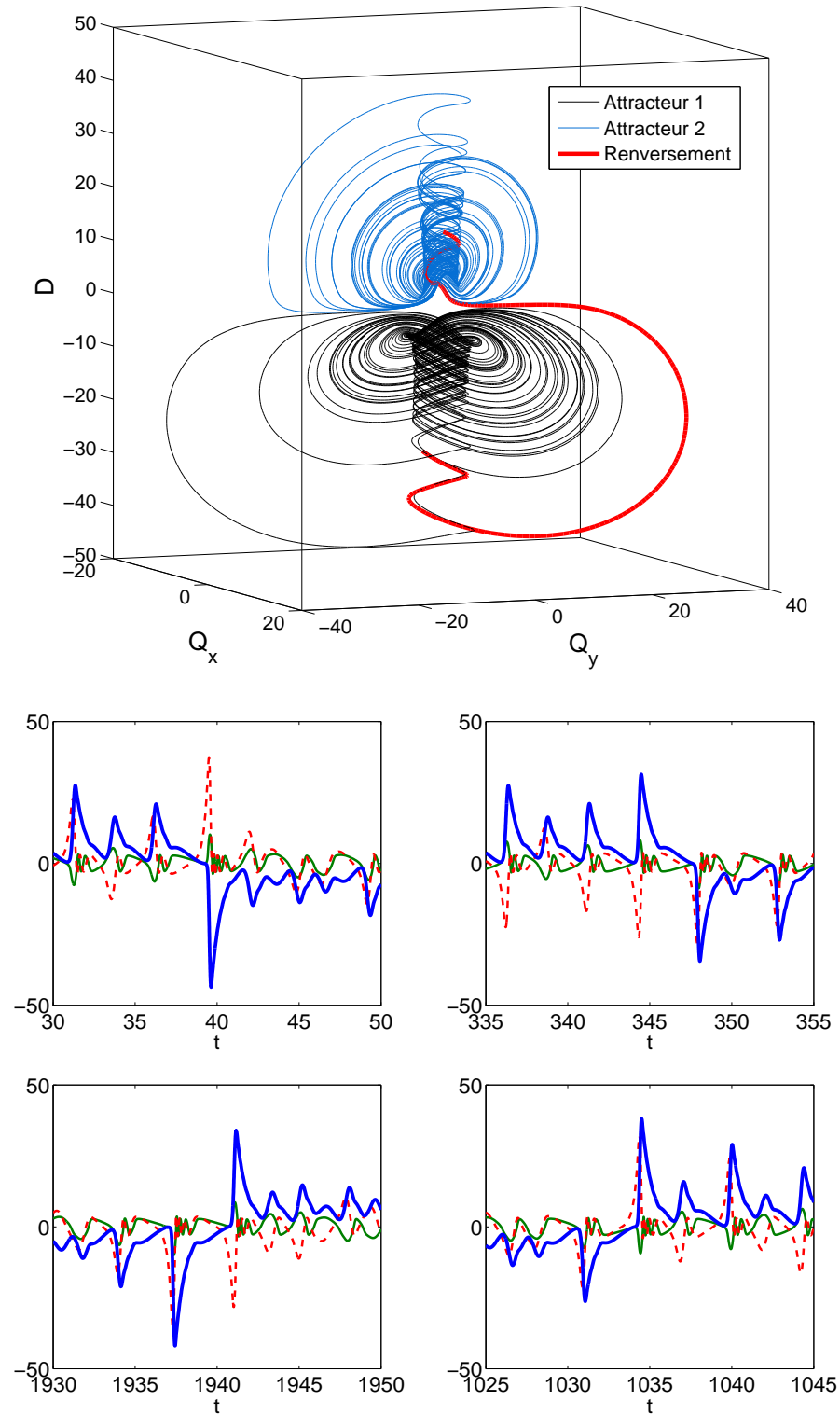


FIGURE 5.13 – En haut : en dessous du seuil d'apparition des renversements, le système possède deux attracteurs chaotiques déconnectés. Au franchissement du seuil, des trajectoires de renversements connectent ces deux attracteurs, qui fusionnent donc en un seul attracteur chaotique. En bas : les quatre "types" de renversements décrits dans le texte (ligne pleine : Q_x , ligne tiretée : Q_y , ligne épaisse : D).

Chacun des cas est illustré par une série temporelle sur la figure 5.13. On constate que lorsque le dipôle passe par zéro, les deux quadrupôles présentent un léger pic. Ce maximum local d'intensité des quadrupôles est le plus souvent (c'est-à-dire en moyenne sur plusieurs renversements) plus grand que les pics observés pendant les phases de polarité donnée.

Différentes prédictions peuvent être faites à partir du scénario d'intermittence de crise : au voisinage du seuil, les renversements sont très rares. Le système passe donc un temps long dans l'attracteur avant de se renverser à nouveau. Il perd ainsi toute mémoire du renversement précédent. Pour cette raison, la durée d'une phase de polarité donnée est indépendante de la durée de la phase précédente. Plus précisément, notons T la variable aléatoire représentant le temps passé dans une polarité, et intéressons-nous à sa fonction de densité de probabilité (PDF). Le système fait un certain nombre de tours dans l'attracteur avant de se renverser. Pour les faibles valeurs de T , on s'attend donc à voir des maxima locaux de la PDF pour les valeurs de T correspondant à un nombre entier de tours d'attracteur. Ces tours d'attracteurs n'ont pas tous la même durée, et pour les temps longs, la probabilité par unité de temps de se renverser devient uniforme. On s'attend donc à observer une PDF exponentielle pour les valeurs de T grandes devant la durée moyenne d'un tour d'attracteur (loi de Poisson) :

$$P(T) = 1/\tau e^{-T/\tau} \quad (5.27)$$

Si l'on note $\langle T \rangle$ le temps moyen passé dans une polarité donnée, l'intermittence de crise prévoit pour $\langle T \rangle^{-1}$ une loi de puissance en l'écart au seuil d'apparition des renversements :

$$\langle T \rangle^{-1} \sim (\nu - \nu_c)^\gamma \quad (5.28)$$

où la valeur de l'exposant γ est relié aux propriétés des deux attracteurs dans la référence [43]. Nous avons vérifié la dépendance en loi de puissance de $\langle T \rangle^{-1}$ avec $\nu - \nu_c$ sur la figure 5.14.

Au voisinage immédiat du seuil, seule une très petite zone du premier attracteur est connectée au second. Ainsi, tous les renversements sont issus quasiment du même point de l'attracteur de départ, et ont donc des trajectoires très similaires dans l'espace des phases. Ils se concentrent autour d'une trajectoire unique lorsque l'on se rapproche du seuil. Du fait des symétries du problème de départ, il y a en fait quatre "trajectoires limites" qui relient les deux polarités (une pour chaque signe de Q_x , puis une pour chaque signe initial de D). Ces quatre trajectoires limites s'obtiennent les unes à partir des autres grâce à \mathcal{S}_x et \mathcal{S}_y . Plus loin du seuil, les trajectoires qui connectent les deux attracteurs sont beaucoup plus dispersées autour de la trajectoire limite. Nous avons tracé sur la figure 5.14 différentes trajectoires de renversements (symétrisées au besoin grâce à \mathcal{S}_x et \mathcal{S}_y), pour montrer que celles-ci se concentrent sur une trajectoire unique au voisinage immédiat du seuil.

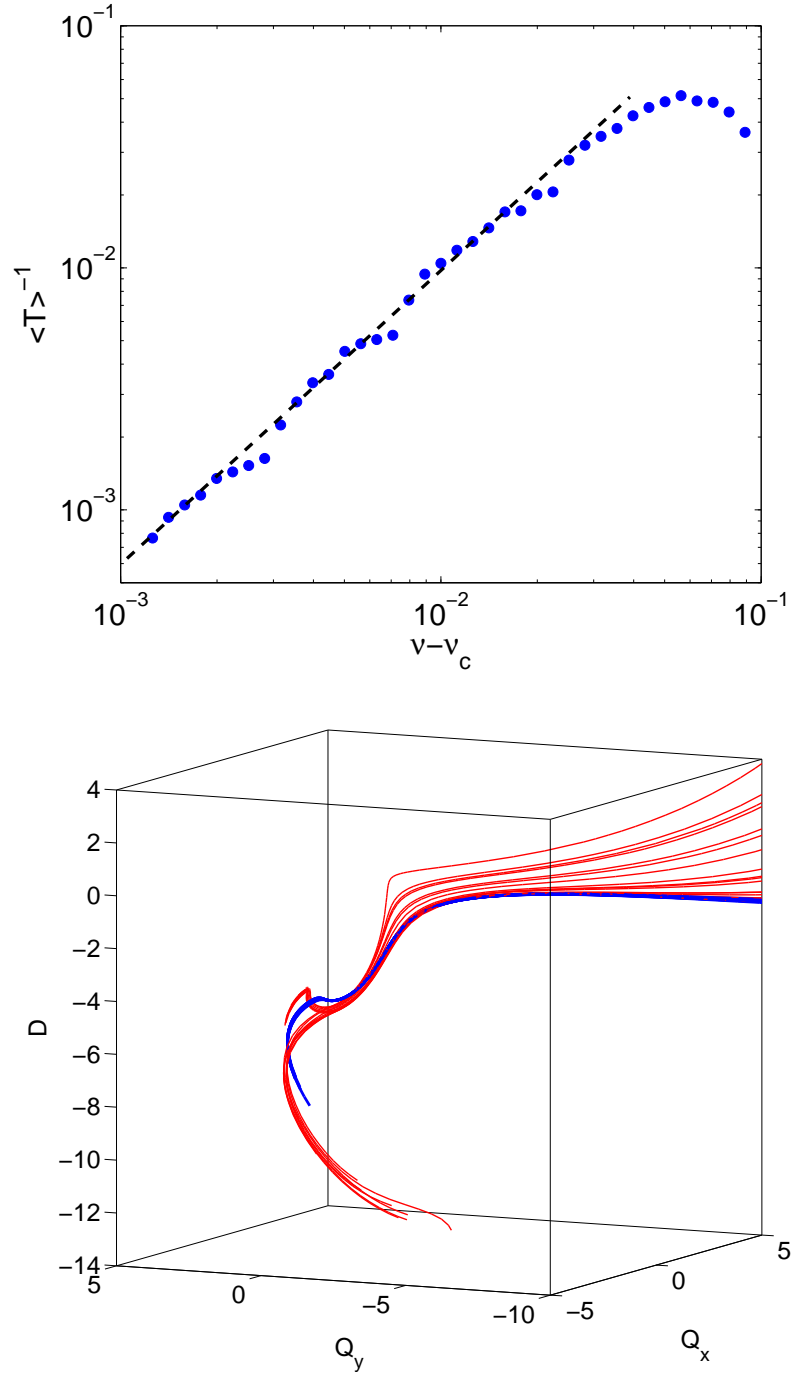


FIGURE 5.14 – En haut : inverse du temps moyen passé dans une polarité donnée en fonction de l'écart au seuil. L'exposant de la loi de puissance vaut environ 1.2. En bas : superposition dans l'espace des phases de 16 trajectoires de renversements, très près du seuil (trait épais) et à 10% au dessus du seuil (trait fin). Au voisinage immédiat du seuil, les renversements se font en suivant une même trajectoire limite.

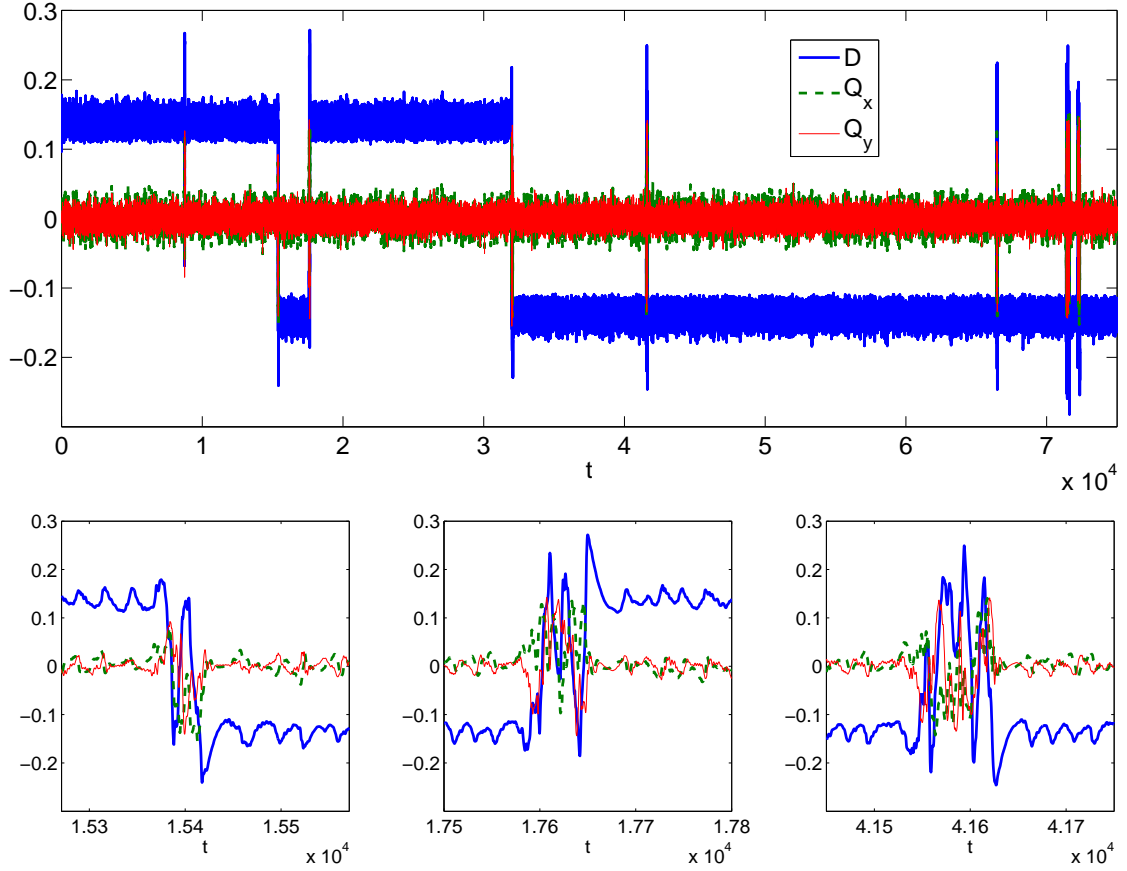


FIGURE 5.15 – En haut : Série temporelle des trois composantes à grande échelle de l’écoulement, pour $Rh = 23.5$. En bas : agrandissements de deux renversements, et d’un ”renversement raté”.

5.3.3 Caractérisation des renversements hydrodynamiques

Considérons toujours l’équation de Navier-Stokes, avec un forçage à un peu plus grande échelle :

$$\partial_t \Delta \psi + J(\Delta \psi, \psi) = -\frac{1}{Rh} \Delta \psi + \frac{1}{Re} \Delta^2 \psi + 3\pi \sin(2\pi x) \sin(4\pi y) \quad (5.29)$$

On force ici un réseau de 2×4 tourbillons. Ceci a le double avantage de rendre les simulations numériques plus rapides, ce qui permet de converger des statistiques plus facilement, et de correspondre à un dispositif expérimental simple à réaliser puisqu’il faut uniquement 8 électrodes pour injecter le courant contre 36 dans le dispositif de Sommeria. Cette géométrie de forçage engendre également une circulation globale, qui se renverse lorsque Rh est suffisamment faible. Toutes les simulations sont effectuées à $Re = 2000$. La valeur critique de Rh vaut $Rh_c \simeq 24.5$. Une série temporelle est présentée sur la figure 5.15. On y a tracé les trois amplitudes D , Q_x et Q_y , telles qu’elles ont été définies précédemment. On constate que les quadrupôles gardent un niveau faible pendant les longues phases de polarité donnée, et qu’ils sont plus importants pendant les renversements. Ceci est bien visible sur les deux agrandissements de renversements. On observe de plus que les trois composantes fluctuent beaucoup pendant les renversements, et que les deux exemples de renversements ne se font pas du tout en suivant une trajectoire identique dans l’espace des phases. On représente enfin un exemple de ”renversement raté” : le système termine une phase de polarité donnée et les trois amplitudes fluctuent beaucoup et changent plusieurs fois de signes avant que le système ne se restabilise dans la polarité initiale.

Temps de sortie d'attracteur chaotique

Tout ceci rend la dynamique plus compliquée que celle du système dynamique à trois modes. Néanmoins, il reste un point commun important entre les deux systèmes : lors des phases de polarité donnée, le système hydrodynamique passe une très longue durée dans le même attracteur chaotique. Lors d'un renversement, il sort de cet attracteur pour rejoindre son symétrique. Ce comportement apparaît pour une valeur critique du paramètre de contrôle, et la fréquence moyenne des renversements s'annule lorsque l'on atteint ce seuil. Ceci semble indiquer que le scénario d'intermittence de crise reste valable pour ce système hydrodynamique, qui n'est après tout qu'un système dynamique possédant un grand nombre de degrés de liberté. Nous souhaitons donc vérifier certaines prédictions de l'intermittence de crise pour ce système. Pour cela, il convient tout d'abord d'avoir une définition claire pour les événements auxquels on s'intéresse. Nous nous intéresserons donc aux **temps de sortie de l'attracteur chaotique**. On considère que le système est sorti de cet attracteur dès que la valeur absolue de D devient inférieure à 0.1. On mesure les durées entre ces différentes sorties, et on ne garde que les valeurs supérieures à un certain seuil. Ainsi les changements de signes rapides de D au moment du renversement ne sont pas comptés comme des sorties d'attracteur. Au voisinage de Rh_c les sorties d'attracteurs sont très rares, et le traitement est très robuste quand au choix des valeurs seuils utilisées. Les trois événements représentés sur la figure 5.15 correspondent chacun à une seule sortie d'attracteur.

Test des prédictions de l'intermittence de crise

Si l'on appelle T la variable aléatoire qu'est le temps de sortie, la première prédiction à tester est que cette grandeur a une PDF exponentielle. Cette PDF est représentée en coordonnées semi-logarithmiques sur la figure 5.16 pour $Rh = 20$. Le test suivant consiste à vérifier que la sortie de l'attracteur se fait en empruntant à peu près la même trajectoire dans l'espace des phases. Sur la figure 5.16 nous avons tracé un grand nombre de trajectoires de sorties, obtenues au voisinage de Rh_c . Les trajectoires sont relativement peu dispersées autour de la trajectoire moyenne, comme le prédit l'intermittence de crise. Rappelons tout de même que ceci n'est vrai qu'au voisinage immédiat de la sortie de l'attracteur, après quoi les différentes trajectoires s'éloignent très rapidement les unes des autres, pour produire la grande diversité de renversements illustrée sur la figure 5.15.

Afin de visualiser dans l'espace réel la trajectoire de sortie d'attracteur, nous avons moyenné la fonction de courant sur douze renversements issus d'une simulation à $Rh = 20$. Au besoin, on applique les symétries \mathcal{S}_x et/ou \mathcal{S}_y pour ne moyenner que des renversements allant de $D > 0$ à $D < 0$ en passant par $Q_x > 0$, et visualiser ainsi une seule des quatre trajectoires de sortie d'attracteur possibles. On représente sur la figure 5.17 la fonction de courant obtenue à douze instants séparés de 1.25 unités de temps. Cette sortie d'attracteur moyenne est très bien convergée : les onze premières images sont qualitativement très similaires si on ne moyenne que sur six renversements, tandis que la douzième image est un peu différente. Le changement de signe de D se fait entre la dixième et la onzième image. Pour des temps plus longs, les différentes trajectoires se séparent rapidement, si bien que la fonction de courant moyenne devient très faible en tout point et n'a plus beaucoup d'intérêt physique. On constate que la sortie de l'attracteur se fait par nucléation d'une petite zone de vorticité négative dans le coin supérieur droit du carré. Dans cette zone le forçage a également un signe négatif, si bien qu'il amplifie ce tourbillon de coin. La circulation grande échelle se trouve alors comprimée dans le coin inférieur gauche, où se

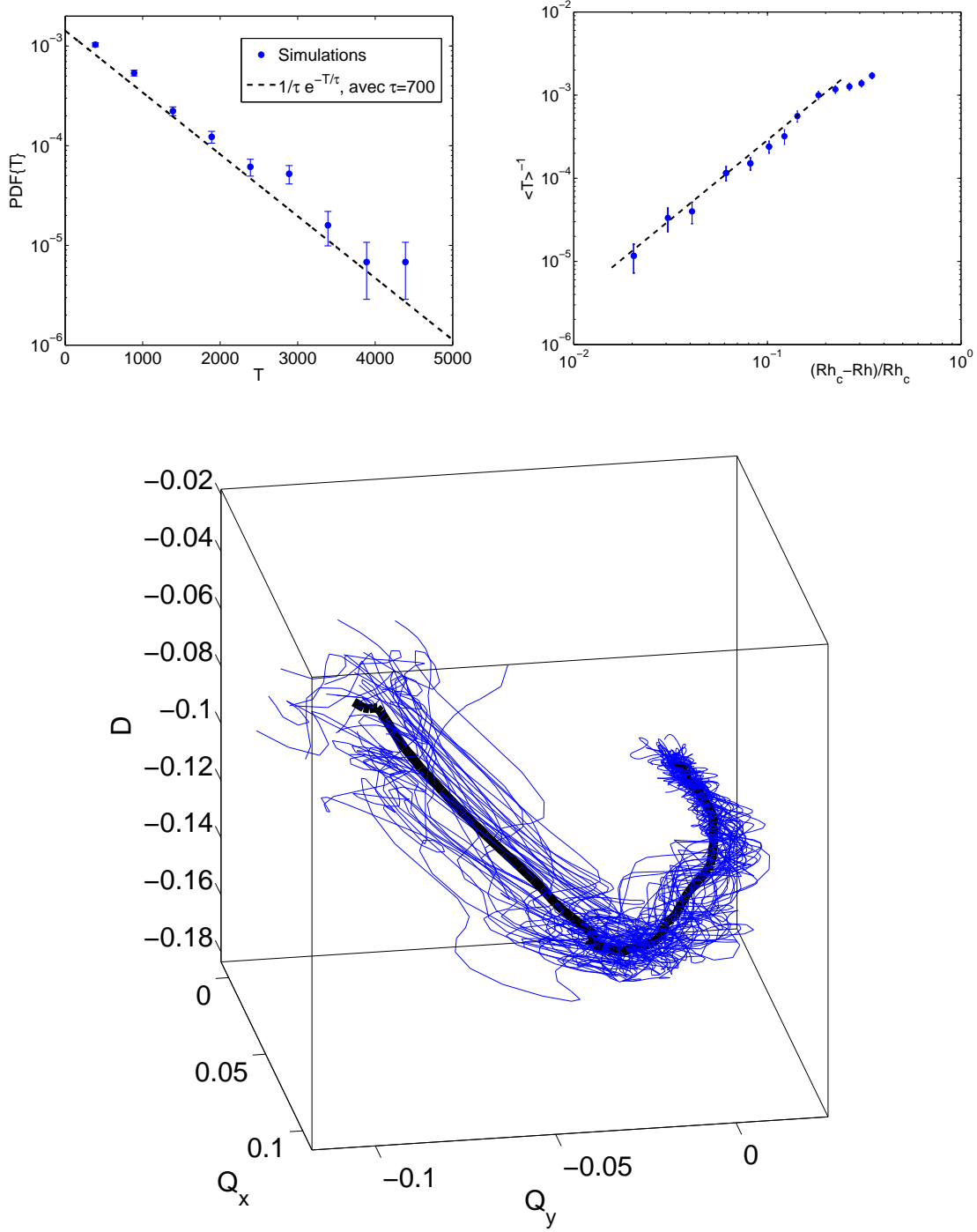


FIGURE 5.16 – En haut à gauche : PDF du temps de sortie d'attracteur pour $Rh = 20$. On obtient un bon accord avec l'exponentielle attendue. La coupure introduite pour T faible élève le niveau de la PDF numérique pour T plus élevé. A droite : Inverse du temps moyen de sortie d'attracteur, en fonction de l'écart au seuil réduit. On observe une loi de puissance, d'exposant 1.9. En bas : superposition dans l'espace des phases de 39 trajectoires de sorties d'attracteur pour Rh compris entre 23 et 24, et trajectoire moyenne (ligne épaisse).

trouve un forçage de signe négatif qui lui retire de l'énergie. A la fin de cette sortie d'attracteur, D est à peu près nul et la vorticité est à peu près équitablement répartie en zones de signes positifs et négatifs : le système a à peu près autant de chances de repartir vers la polarité initiale (renversement raté) que de partir vers la polarité opposée (renversement réussi).

La dernière prédiction à tester concerne le temps moyen de sortie d'attracteur. Nous avons donc tracé $\langle T \rangle^{-1}$ en fonction de l'écart au seuil réduit $(Rh - Rh_c)/Rh_c$ sur la figure 5.16. Sur cette figure comme dans les précédentes, les barres d'erreur ont été évaluées en prenant la racine du nombre d'événements observés pour chaque valeur de Rh , divisé par le temps final de la simulation. Les points suivent relativement bien une loi de puissance, en accord avec la prédiction de l'intermittence de crise. L'exposant de la loi de puissance dépend assez fortement de la valeur de Rh_c choisie. Il est compris entre 1.9 et 2.3.

5.4 Conclusion

Nous avons étudié la circulation globale engendrée par la déstabilisation d'un réseau carré de tourbillons. En l'absence de forçage et de dissipation, un seul mode de Fourier est solution du problème non linéaire. La circulation globale est relativement bien représentée par le mode de Fourier le plus bas. Nous avons linéarisé les équations autour de cette solution pour calculer les petites échelles qui coexistent avec cette circulation globale lorsque le forçage est non nul. On obtient ainsi une famille de solutions dépendant d'un paramètre. Un mécanisme de sélection faisant intervenir le terme visqueux nous a permis de sélectionner une seule valeur de l'amplitude de la circulation globale. Cette technique de calcul semble pouvoir s'appliquer à d'autres problèmes dans lesquels une cascade inverse d'énergie forme un "condensat" intense dans un mode de grande taille caractéristique, avec lequel coexistent des fluctuations de petite amplitude et à petite échelle.

L'ajout d'un terme de friction linéaire déstabilise la circulation globale, qui présente des renversements erratiques au-delà d'une valeur seuil du coefficient de friction. Ces renversements ont lieu sur un fond turbulent et en l'absence de brisure de symétrie imposée. Ils sont plus complexes que ceux du champ magnétique de l'expérience VKS en ce sens qu'aucune justification mathématique ne permet a priori d'isoler un petit nombre de modes qui évoluent indépendamment des fluctuations à petite échelle. Cependant, des arguments physiques vont dans ce sens : en l'absence de frottement, le système forme un "condensat" dans le mode de Fourier fondamental. Lorsque le frottement augmente, cette accumulation d'énergie dans le fondamental est restreinte, et les deux modes de Fourier suivants acquièrent une énergie significative. On s'est donc limité aux amplitudes des trois premiers modes de Fourier de la fonction de courant pour construire un système dynamique simple. Ce dernier présente des renversements qui apparaissent par un scénario d'intermittence de crise. Ces renversements sont caractérisés par :

- Un seuil en-dessous duquel il n'y a pas de renversements.
- Une PDF exponentielle pour la durée T d'une phase de polarité donnée.
- Une dépendance en loi de puissance de $\langle T \rangle^{-1}$ en fonction de l'écart au seuil.
- Une trajectoire limite dans l'espace des phases, autour de laquelle se concentrent les trajectoires de renversements au voisinage de leur seuil d'apparition.

Ces différentes prédictions ont été testées et validées sur les données issues des simulations numériques. Dans la géométrie considérée, l'équation de Navier-Stokes à deux dimensions peut donc être vue comme un système dynamique de grande taille, dans lequel des renversements apparaissent par un scénario d'intermittence de crise.

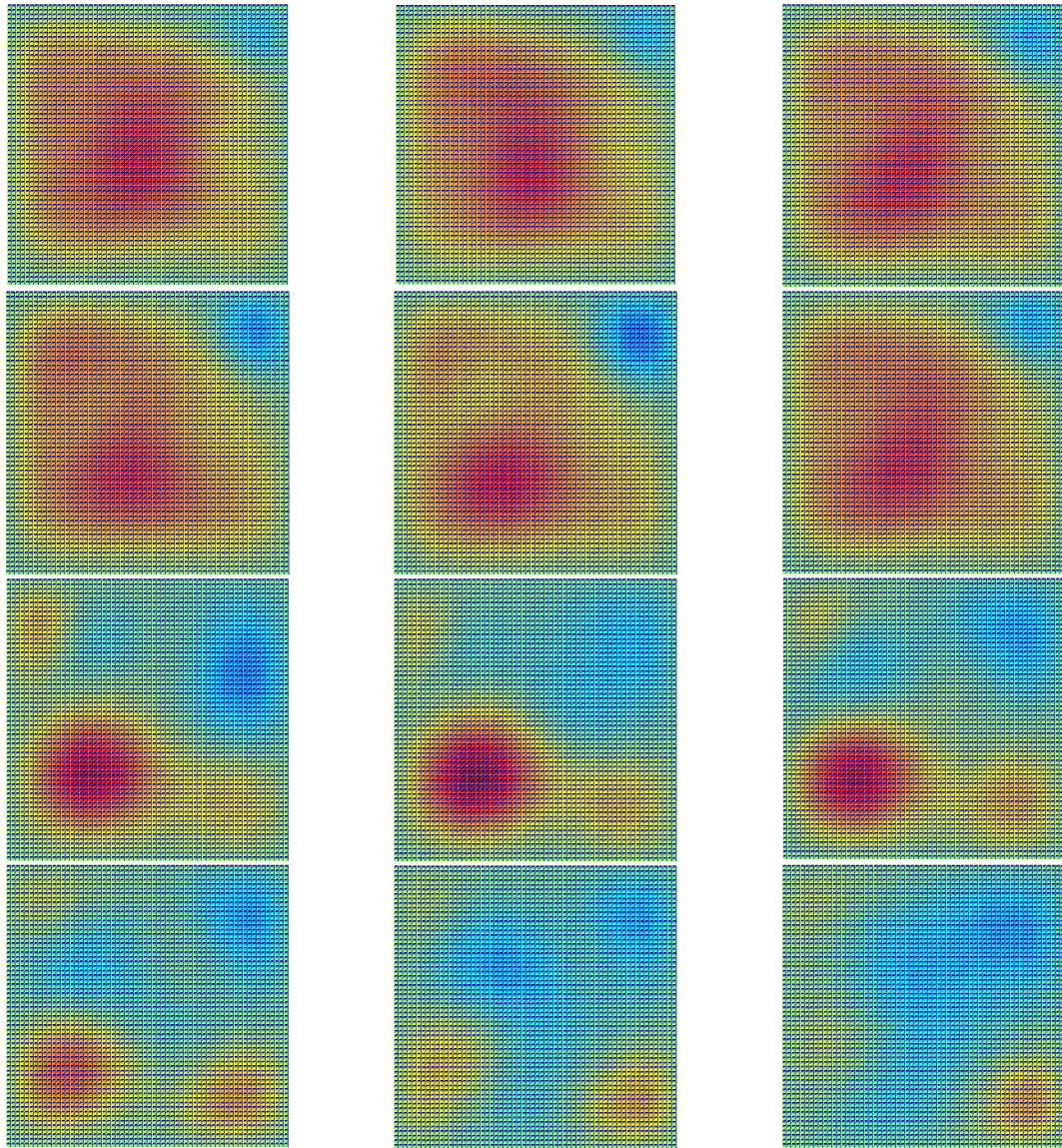


FIGURE 5.17 – Evolution de la fonction de courant moyennée et symétrisée sur douze renversements. Les images sont séparées de 1.25 unités de temps.

5.A Méthode de résolution numérique de l'équation de Navier-Stokes 2D

Nous avons réalisé un code semi-spectral afin de résoudre l'équation de Navier-Stokes à deux dimensions, écrite sous la forme de l'équation (5.2), avec des conditions aux limites de type "stress-free". Ces conditions aux limites sont assurées à l'aide de la décomposition (5.4), qui impose $\psi = 0$ en $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ et $y = 1$. Si l'on note N^2 la résolution de la simulation numérique, l'espace est décomposé sous la forme $(x_p, y_q)_{(p,q) \in \{1, \dots, N\}^2}$, avec $x_n = y_n = n/(N+1)$.

On note alors \mathcal{F} la transformée de Fourier, définie par :

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : \mathcal{R}^{N^2} &\rightarrow \mathcal{R}^{N^2} \\ (\psi(x_p, y_q))_{(p,q) \in \{1, \dots, N\}^2} &\rightarrow (\psi_{p,q})_{(p,q) \in \{1, \dots, N\}^2} \end{aligned} \quad (5.30)$$

et telle que :

$$\psi(x_p, y_q, t) = \sum_{m=1, n=1}^{m=N, n=N} \psi_{m,n}(t) \sin(m\pi x_p) \sin(n\pi y_q) \quad (5.31)$$

On note \mathcal{F}^{-1} l'inverse de \mathcal{F} .

5.A.1 Evaluation des termes linéaires

Toutes les opérations de dérivations spatiales deviennent de simples multiplications dans l'espace de Fourier. Le temps est discrétisé en pas de temps dt , et l'on souhaite obtenir les coefficients de Fourier de ψ à l'instant $t+dt$ en fonction de ceux à l'instant t . Les termes visqueux et de friction sont traités de manière implicite, c'est-à-dire qu'ils sont évalués en remplaçant ψ dans l'équation (5.2) par sa valeur à $t+dt$ et non à t . Cette opération permet une meilleure stabilité du code numérique. Si l'on note \mathcal{NL} le vecteur de \mathcal{R}^{N^2} représentant le terme non linéaire de (5.2) dans l'espace de Fourier, et évalué à l'instant t_k , les coefficients de Fourier de la fonction de courant à l'instant t_{k+1} s'obtiennent à partir de l'égalité :

$$\psi_{p,q}(t_{k+1}) \simeq \frac{\psi_{p,q}(t_k) + \frac{dt}{\pi^2(p^2+q^2)} \mathcal{NL}_{p,q} - \frac{ndt}{\pi(p^2+q^2)} \delta_{p,n} \delta_{q,n}}{1 + \frac{dt}{Rh} + \frac{\pi^2(p^2+q^2)dt}{Re}} \quad (5.32)$$

Cette équation est exacte dans la limite $dt \rightarrow 0$, et constitue une bonne approximation de l'équation continue pour dt suffisamment petit.

5.A.2 Evaluation du terme non-linéaire

Le partie couteuse en temps de calcul est l'évaluation du terme non linéaire. En effet, le calcul des termes linéaires est constitué de dérivations, qui s'effectuent à l'aide d'une simple multiplication dans l'espace de Fourier, donc en N^2 opérations (on rappelle que N^2 est la résolution spatiale totale de la simulation numérique). Le terme non-linéaire lui est un produit de convolution dans l'espace de Fourier, ce qui demanderait N^4 opérations. On préfère alors calculer les dérivées dans l'espace de Fourier, puis repasser dans l'espace réel pour effectuer le produit de ces dérivées. Le résultat du produit est ensuite à nouveau transposé dans l'espace de Fourier. Les opérations couteuses en temps de calcul sont alors les transformées de Fourier, qui pour une résolution de N^2 points prennent un temps de l'ordre de $N^2 \ln(N)$.

On introduit alors les nouvelles transformées de Fourier \mathcal{F}_x et \mathcal{F}_y , correspondant à la transformée de Fourier définie précédemment, mais effectuée uniquement selon la dimension x ou

y . On définit de plus \mathcal{F}_x^{\cos} et \mathcal{F}_y^{\cos} , qui sont identiques aux transformées de Fourier définies précédemment, mais pour un vecteur décomposé sur une base de cosinus et non de sinus. À l'aide de ces différentes notations, le terme non linéaire \mathcal{NL} évalué à l'instant t_k s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathcal{NL} = & \mathcal{F} \left\{ \mathcal{F}_y^{-1} \circ \mathcal{F}_x^{\cos -1} \{ [-p\pi^3(p^2 + q^2)\psi_{p,q}]_{(p,q)} \} \times \mathcal{F}_x^{-1} \circ \mathcal{F}_y^{\cos -1} \{ [q\pi\psi_{p,q}]_{(p,q)} \} \right. \\ & \left. - \mathcal{F}_x^{-1} \circ \mathcal{F}_y^{\cos -1} \{ [-q\pi^3(p^2 + q^2)\psi_{p,q}]_{(p,q)} \} \times \mathcal{F}_y^{-1} \circ \mathcal{F}_x^{\cos -1} \{ [p\pi\psi_{p,q}]_{(p,q)} \} \right\} \end{aligned} \quad (5.33)$$

où l'indice (p, q) est une abréviation de $(p, q) \in \{1, \dots, N\}^2$.

Le code numérique a été écrit en langage C, et les transformées de Fourier sont effectuées à l'aide de la librairie fftw.

5.B Calcul analytique de la solution à haut Re

Dans ce qui suit nous présentons le calcul de la vorticité antisymétrique $-\Delta\xi_a$, puis celui de la vorticité symétrique $-\Delta\xi_s$.

5.B.1 Calcul de ξ_a

On souhaite résoudre l'équation (5.8), dans laquelle on développe le jacobien J , avant de diviser l'équation obtenue par $\cos(\pi x)\cos(\pi y)$. On obtient alors l'équation suivante :

$$\partial_x(\lambda\Delta\xi_a)\tan(\pi x) - \partial_y(\lambda\Delta\xi_a)\tan(\pi y) = n \frac{\sin(n\pi x)\sin(n\pi y)}{\cos(\pi x)\cos(\pi y)}, \quad (5.34)$$

Cette équation se simplifie nettement à l'aide du changement de variables suivant :

$$X = \frac{1}{\pi} \ln(\sin(\pi x)) \Leftrightarrow x = \frac{1}{\pi} \arcsin(e^{\pi X}) \quad (5.35)$$

$$Y = \frac{1}{\pi} \ln(\sin(\pi y)) \Leftrightarrow y = \frac{1}{\pi} \arcsin(e^{\pi Y}) \quad (5.36)$$

$$\lambda\Delta\xi_a = U_a(X, Y) \quad (5.37)$$

On obtient alors :

$$\partial_X U_a - \partial_Y U_a = n \frac{\sin(n \arcsin(e^{\pi X})) \sin(n \arcsin(e^{\pi Y}))}{\cos(\arcsin(e^{\pi X})) \cos(\arcsin(e^{\pi Y}))} \quad (5.38)$$

Pour n pair, $\sin(nx)$ peut-être décomposé sous la forme $\cos(x)P(\sin(x))$, où P est un polynôme de degré $n - 1$. Ainsi le membre de droite de l'équation (5.38) est un polynôme en $e^{\pi X}$ et $e^{\pi Y}$, et l'équation peut alors facilement être intégrée. Nous nous intéressons maintenant en détails aux forçages $n = 6$ et $n = 10$.

6x6 tourbillons

Développons le membre de droite de l'équation (5.38) dans le cas $n = 6$:

$$\begin{aligned} \partial_X U_a - \partial_Y U_a = & 24 \left[256e^{5\pi(X+Y)} - 256e^{\pi(5X+3Y)} + 48e^{\pi(5X+Y)} - 256e^{\pi(3X+5Y)} \right. \\ & \left. + 256e^{3\pi(X+Y)} - 48e^{\pi(3X+Y)} + 48e^{\pi(X+5Y)} - 48e^{\pi(X+3Y)} + 9e^{\pi(X+Y)} \right] \end{aligned} \quad (5.39)$$

Les monômes en $e^{\pi(pX+qY)}$ avec $p \neq q$ s'intègrent directement sous la même forme. Les monômes de la forme $e^{\pi p(X+Y)}$ sont des éléments du noyau de l'opérateur linéaire du membre de gauche, et s'intègrent donc sous la forme $(X - Y)e^{\pi p(X+Y)}$. La fonction U obtenue est alors :

$$U_a(X, Y) = 24 \left[\frac{9}{2}(X - Y)e^{\pi(X+Y)} + 128(X - Y)e^{3\pi(X+Y)} + 128(X - Y)e^{5\pi(X+Y)} \right. \\ \left. + \frac{24}{\pi}e^{\pi(X+3Y)} - \frac{12}{\pi}e^{\pi(X+5Y)} - \frac{24}{\pi}e^{\pi(3X+Y)} + \frac{128}{\pi}e^{\pi(3X+5Y)} \right. \\ \left. + \frac{12}{\pi}e^{\pi(5X+Y)} - \frac{128}{\pi}e^{\pi(5X+3Y)} \right] + g(X + Y) \quad (5.40)$$

La fonction $g(X + Y)$ est la solution de l'équation sans second membre. C'est une fonction de $\sin(\pi x) \sin(\pi y)$, et elle correspond donc à de la circulation à grande échelle. Par hypothèse, ψ_0 a été pris de la forme $\sin(\pi x) \sin(\pi y)$. En cohérence avec cette hypothèse on prend $g = 0$. On est alors en mesure d'exprimer la vorticité de la solution à petite échelle en repassant aux variables x et y :

$$\lambda \Delta \xi_a = \quad (5.41) \\ \frac{24}{\pi} \left[\frac{9}{2} \ln(\sin(\pi x)/\sin(\pi y)) \sin(\pi x) \sin(\pi y) + 128 \ln(\sin(\pi x)/\sin(\pi y)) \sin^3(\pi x) \sin^3(\pi y) \right. \\ \left. + 128 \ln(\sin(\pi x)/\sin(\pi y)) \sin^5(\pi x) \sin^5(\pi y) + 24 \sin(\pi x) \sin^3(\pi y) - 12 \sin(\pi x) \sin^5(\pi y) \right. \\ \left. - 24 \sin^3(\pi x) \sin(\pi y) + 128 \sin^3(\pi x) \sin^5(\pi y) + 12 \sin^5(\pi x) \sin(\pi y) - 128 \sin^5(\pi x) \sin^3(\pi y) \right]$$

Ce champ de vorticité à petite échelle est représenté sur la figure 5.6.

10x10 tourbillons

Lors du développement du membre de droite de l'équation (5.38), on obtient n^2 termes. Pour les n grands on utilise donc le logiciel Mathematica pour calculer le champ $\Delta \xi_a$. Dans le cas $n = 10$, on obtient :

$$\lambda \Delta \xi_a = (1/(3\pi))(10 \sin(\pi x) \sin(\pi y)(40 \cos(6\pi x) + 15 \cos(8\pi x) - 240 \cos(2\pi y) \quad (5.42) \\ - 90 \cos(4\pi y) - 40 \cos(6\pi y) - 15 \cos(8\pi y) + 150 \ln(\sin(\pi x)) - 150 \ln(\sin(\pi y)) \\ + 1280 \cos(6\pi x) \sin(\pi x)^2 \sin(\pi y)^2 - 38400 \cos(2\pi y) \sin(\pi x)^2 \sin(\pi y)^2 \\ - 7680 \cos(4\pi y) \sin(\pi x)^2 \sin(\pi y)^2 - 1280 \cos(6\pi y) \sin(\pi x)^2 \sin(\pi y)^2 \\ + 38400 \ln(\sin(\pi x)) \sin(\pi x)^2 \sin(\pi y)^2 - 38400 \ln(\sin(\pi y)) \sin(\pi x)^2 \sin(\pi y)^2 \\ - 387072 \cos(2\pi y) \sin(\pi x)^4 \sin(\pi y)^4 + 393216 \ln(\sin(\pi x)) \sin(\pi x)^8 \sin(\pi y)^8 \\ - 32256 \cos(4\pi y) \sin(\pi x)^4 \sin(\pi y)^4 + 677376 \ln(\sin(\pi x)) \sin(\pi x)^4 \sin(\pi y)^4 \\ - 677376 \ln(\sin(\pi y)) \sin(\pi x)^4 \sin(\pi y)^4 - 393216 \cos(2\pi y) \sin(\pi x)^6 \sin(\pi y)^6 + \\ 1572864 \ln(\sin(\pi x)) \sin(\pi x)^6 \sin(\pi y)^6 - 1572864 \ln(\sin(\pi y)) \sin(\pi x)^6 \sin(\pi y)^6 \\ - 393216 \ln(\sin(\pi y)) \sin(\pi x)^8 \sin(\pi y)^8 + 6 \cos(4\pi x)(15 + 1280 \sin(\pi x)^2 \sin(\pi y)^2 \\ + 5376 \sin(\pi x)^4 \sin(\pi y)^4) + 48 \cos(2\pi x)(5 + 800 \sin(\pi x)^2 \sin(\pi y)^2 + 8064 \sin(\pi x)^4 \sin(\pi y)^4 \\ + 8192 \sin(\pi x)^6 \sin(\pi y)^6)))$$

Ce champ de vorticité à petite échelle est également représenté sur la figure 5.6.

5.B.2 Calcul de ξ_s

Une fois calculé $\Delta\xi_a$, on peut calculer $\Delta\xi_s$ à l'aide de l'équation (5.9). Une fois divisée par $\cos(\pi x) \cos(\pi y)$, et en utilisant le même changement de variables, cette équation prend la forme :

$$\partial_X U_s - \partial_Y U_s = \frac{1}{\pi \lambda Re} \frac{\Delta^2 \xi_a}{\cos(\pi x) \cos(\pi y)} \quad (5.43)$$

avec $U_s(X, Y) = \Delta\xi_s$.

En introduisant le changement de variables :

$$S = X \quad (5.44)$$

$$T = X + Y \quad (5.45)$$

$$\frac{\Delta^2 \xi_a}{\cos(\pi x) \cos(\pi y)} = \frac{1}{\lambda} F(S, T) \quad (5.46)$$

$$U_s(X, Y) = G(S, T) \quad (5.47)$$

l'équation (5.43) s'écrit :

$$\partial_S G = \frac{1}{\pi \lambda^2 Re} F(S, T) \Rightarrow U_s(X, Y) = \frac{1}{\pi \lambda^2 Re} \int_{S=0}^{S=X} F(S, X + Y) dS \quad (5.48)$$

La fonction F peut être obtenue aisément à l'aide du logiciel Mathematica. Dans le cas de 6x6 tourbillons, on obtient :

$$\begin{aligned} U_s(X, Y) = \frac{1}{\lambda^2 Re} \int_{S=0}^{S=X} \frac{1}{\sqrt{1 - e^{2\pi S}} \sqrt{1 - e^{2\pi(-S+X+Y)}}} & 12e^{-\pi(X+Y)} \left\{ -9e^{2\pi S} \right. \\ & + 9e^{2\pi(-S+X+Y)} - 320e^{2\pi(S+X+Y)} - 2160e^{2\pi(2S+X+Y)} - 6400e^{-2\pi(S-3(X+Y))} + 320e^{-2\pi(S-2(X+Y))} \\ & + 6400e^{2\pi(S+2(X+Y))} + 2160e^{2\pi(-2S+3(X+Y))} - 2 \left(9e^{2\pi(X+Y)} + 2304e^{4\pi(X+Y)} \right. \\ & + 6400e^{6\pi(X+Y)} - 768e^{2\pi(S+X+Y)} - 2560e^{-2\pi(S-3(X+Y))} - 768e^{-2\pi(S-2(X+Y))} \\ & \left. \left. - 2560e^{2\pi(S+2(X+Y))} \right) \pi S + 2 \left(9e^{2\pi(X+Y)} + 2304e^{4\pi(X+Y)} + 6400e^{6\pi(X+Y)} - 768e^{2\pi(S+X+Y)} \right. \right. \\ & \left. \left. - 2560e^{-2\pi(S-3(X+Y))} - 768e^{-2\pi(S-2(X+Y))} - 2560e^{2\pi(S+2(X+Y))} \right) \pi(-S + X + Y) \right\} dS \end{aligned} \quad (5.49)$$

d'où l'on déduit la composante symétrique de vorticité à petite échelle :

$$\Delta\xi_s = U_s \left(\frac{1}{\pi} \ln(\sin(\pi x)), \frac{1}{\pi} \ln(\sin(\pi y)) \right) \quad (5.50)$$

En pratique l'intégration de la fonction F est réalisée numériquement.

Dans le cas de 10x10 tourbillons la fonction F contient 10^2 termes que l'on obtient à l'aide de Mathematica. L'écriture explicite de cette fonction F ne présente pas d'intérêt particulier, d'autant plus que l'on évalue ensuite $\Delta\xi_s$    l'aide d'une intégration numérique.

Une fois les champs $\Delta\xi_a$ et $\Delta\xi_s$ connus, on obtient les champs ξ_a et ξ_s en inversant le laplacien et en imposant les conditions aux limites de type "stress-free". Cette opération est réalisée en passant dans l'espace de Fourier, c'est-à-dire en red  composant les champs $\Delta\xi_a$ et $\Delta\xi_s$ sur la base $\sin(p\pi x) \sin(q\pi y)$. Le champ ξ_s obtenu est représenté sur la figure 5.7.

Conclusion

Nous avons abordé dans cette thèse différents aspects de la dynamique d'une structure à grande échelle engendrée sur un fond turbulent. L'étude de la dynamo VKS nous a permis de réduire la dynamique du champ magnétique à celle de deux modes couplés. Cette simplification aboutit à une équation d'amplitude, dont les coefficients fluctuent du fait de la turbulence de l'écoulement dynamo. L'étude de cette équation d'amplitude fournit un cadre simple dans lequel nous pouvons interpréter et expliquer les différents résultats de l'expérience VKS : champs magnétiques stationnaires, champs oscillants, renversements aléatoires, et zones de bistabilité entre champ magnétique stationnaire et oscillant.

A l'aide d'un modèle simple de dynamo cinématique, nous avons étudié la structure spatiale du champ magnétique engendré, et nous avons montré que la localisation hémisphérique du champ magnétique est également une conséquence générique de la brisure de symétrie de l'écoulement dynamo. Cette prédiction d'une localisation hémisphérique du champ magnétique a été vérifiée à l'aide de données expérimentales de VKS. Elle fournit une origine simple au champ magnétique hémisphérique rémanent sur Mars et à la localisation des taches solaires dans l'hémisphère Sud à la fin du minimum de Maunder.

La réduction du problème magnétique à une équation d'amplitude simple permet de faire une analogie entre ce problème et celui de la dérive d'un motif périodique. Nous avons donc étudié l'équation d'amplitude dans ce contexte plus simple, en régime linéaire et non-linéaire. Les résultats obtenus permettent de prédire l'existence d'une région de l'espace des paramètres de VKS autorisant un champ magnétique quadrupolaire stable. Cette prédiction n'est cependant valable que si la dynamo VKS peut être décomposée en deux dynamos éloignées interagissant faiblement.

Le quatrième chapitre nous a permis de mettre en évidence un mécanisme par lequel une variation des conditions aux limites à petite échelle entraîne une instabilité d'un champ à grande échelle. Le mécanisme par lequel les variations de perméabilité magnétique ou de conductivité électrique produisent un effet dynamo a été explicité à l'aide d'un développement asymptotique. Ce mécanisme semble pouvoir expliquer le rôle déterminant des pales ferromagnétiques des disques de l'expérience VKS.

Le dernier chapitre se distingue des précédents en ce sens qu'il ne correspond pas à une étude au voisinage d'un seuil d'instabilité. Nous avons mis en évidence l'existence d'une famille de solutions de l'équation d'Euler à deux dimensions, dans laquelle coexistent une circulation globale et des petites échelles engendrées par le forçage. Le passage à l'équation de Navier-Stokes sélectionne une solution au sein de cette famille. Il est intéressant de constater que l'amplitude est sélectionnée par la viscosité, mais que sa valeur est indépendante de ce coefficient de viscosité. La prise en compte d'un terme de friction linéaire nous a permis d'observer numériquement des renversements aléatoires, que nous avons modélisés par un système dynamique de basse dimensionalité. Ceci nous a permis d'identifier le scénario d'intermittence de crise par lequel apparaissent les renversements dans le système dynamique comme dans les simulations numériques.

La séparation entre un champ à grande échelle et des fluctuations turbulentes n'est justifiée mathématiquement qu'au voisinage du seuil d'apparition de ce champ. Il existe pourtant un grand nombre de systèmes physiques dans lesquels la dynamique du champ à grande échelle est étudiée loin de ce seuil. Outre les renversements de la circulation à grande échelle présentés dans

le dernier chapitre de cette thèse, on peut citer les nombreuses études dédiées aux renversements de circulations globales engendrées en convection de Rayleigh Bénard (voir la revue [44]) et l'on peut se rappeler les différentes motivations océanographiques présentées en introduction de cette thèse. Ces systèmes présentent tous des grandes échelles. La plupart d'entre eux sont en bonne approximation bidimensionnels, si bien qu'un processus de cascade inverse doit être responsable d'une accumulation d'énergie dans ces grandes échelles. Certaines études de renversements en convection ont été effectuées à deux dimensions [45], auquel cas le même type d'argument peut être utilisé pour justifier la grande quantité d'énergie présente dans les grandes échelles de l'écoulement. Pour les systèmes de convection à trois dimensions, la forte rotation due à la présence de la circulation globale peut suffire à bidimensionnaliser partiellement l'écoulement. Du fait de cette bidimensionalisation, l'énergie cascade vers les grandes échelles afin d'alimenter le rouleau pré-existant.

Au-delà de ces arguments qualitatifs, on aimerait pouvoir évaluer le transfert d'énergie vers les grandes échelles. L'objectif est alors de chercher une fermeture qui permette de s'affranchir des petites échelles pour ne décrire que les grandes. S'il est certainement déraisonnable de vouloir chercher des solutions générales à ces problèmes fortement non-linéaires, un problème peut-être plus abordable - bien que très ambitieux - est le suivant : connaissant les propriétés spatio-temporelles des fluctuations turbulentes à petite échelle, peut-on écrire une équation fermée, éventuellement stochastique, pour le champ à grande échelle ? Les coefficients de cette équation peuvent-ils être calculés à partir des propriétés de la turbulence, ou bien est-on condamné à ajuster les coefficients du modèle pour l'adapter à la dynamique observée ?

Bibliographie

- [1] G.K. VALLIS. *El niño : a chaotic dynamical system ?*. Science (1986).
- [2] J. LARMOR. *How could a rotating body like the Sun become a magnet ?*. Brit. Ass. Advmt. Sci (1919).
- [3] G.O. ROBERTS. *Dynamo action of fluid motions with two-dimensional periodicity*. Phil. Trans R. Soc. Lond. A, **271**, 411-454 (1972).
- [4] YU. B. PONOMARENKO. *On the theory of hydromagnetic dynamos*. Zh. Prikl. Mech. Tech. Fiz.(USSR), (1973).
- [5] R. STIEGLITZ, U. MÜLLER. *Experimental demonstration of a homogeneous two-scale dynamo*. Physics of Fluids, **13**, (2001).
- [6] A. GAILITIS ET AL.. *Detection of a Flow Induced Magnetic Field Eigenmode in the Riga Dynamo Facility*. Phys. Rev. Lett., **84**, 4365–4368 (2000).
- [7] J.C. RIBES, E. NESME-RIBES. *The solar sunspot cycle in the Maunder minimum AD 1645 to AD 1715*. Astron. Astrophys., **276**, 549-563 (1993).
- [8] J.C. RIBES, E. NESME-RIBES. *Geomagnetic dipole strength and reversal rate over the past two million years*. Nature, **435**, 802-805 (2005).
- [9] R. MONCHAUX, M. BERHANU, M. BOURGOIN, M. MOULIN, PH. ODIER, J.-F. PINTON, R. VOLK, S. FAUVE, N. MORDANT, F. PÉTRÉLIS, A. CHIFFAUDEL, F. DAVIAUD, B. DUBRULLE, C. GASQUET, L. MARIÉ, F. RAVELET. *Generation of a magnetic field by dynamo action in a turbulent flow of liquid sodium*. Phys. Rev. Lett., **98** (2007).
- [10] M. BERHANU, R. MONCHAUX, S. FAUVE, N. MORDANT, F. PÉTRÉLIS, A. CHIFFAUDEL, F. DAVIAUD, B. DUBRULLE, L. MARIÉ, F. RAVELET, M. BOURGOIN, PH. ODIER, J.-F. PINTON, R. VOLK. *Magnetic field reversals in an experimental turbulent dynamo*. Europhysics Letters, **77**, 5 (2007).
- [11] H.K. MOFFATT. *Magnetic field generation in conducting fluids*. Cambridge University Press, Cambridge, UK (1978).
- [12] P.H. ROBERTS. *Kinematic Dynamo Models*. Phil. Trans R. Soc. Lond. A, **272**, 663-698 (1972).
- [13] F. PÉTRÉLIS, S. FAUVE. *Chaotic dynamics of the magnetic field generated by dynamo action in a turbulent flow*. Journal of Physics : Condensed matter, **20**, 49 (2008).
- [14] F. PÉTRÉLIS, S. FAUVE, E. DORMY, J.P. VALET. *Simple Mechanism for Reversals of Earth's Magnetic Field*. Phys. Rev. Lett., **102** (2009).
- [15] C. GISSINGER. *Dipole-quadrupole dynamics during magnetic field reversals*. Phys. Rev. E, **82** (2010).
- [16] M. BERHANU, B. GALLET, R. MONCHAUX, M. BOURGOIN, PH. ODIER, J.F. PINTON, N. PLIHON, R. VOLK, S. FAUVE, N. MORDANT, F. PÉTRÉLIS, S. AUMAÎTRE, A. CHIFFAUDEL, F. DAVIAUD, B. DUBRULLE, F. RAVELET. *Bistability between a stationary and*

- an oscillatory dynamo in a turbulent flow of liquid sodium.* Journal of Fluid Mechanics, **641**, 217-226 (2009).
- [17] J. GUCKENHEIMER, P. HOLMES. *Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields.* Applied Mathematical Sciences, **42** (1983).
 - [18] W. DEINZER, M. STIX. *On the eigenvalues of Krause-Steenbeck's solar dynamo.* Astron. Astrophys., **12**, 111-119 (1971).
 - [19] B. LANGLAIS, M.E. PURUCKER, M. MANDEA. *Crustal magnetic field of Mars.* Journal of Geophysical Research, **108** (2003).
 - [20] E. GROTE, F.H. BUSSE. *Hemispherical dynamos generated by convection in rotating spherical shells.* Phys. Rev. E, **62** (2000).
 - [21] M. LANDEAU, J. AUBERT. *Equatorially asymmetric convection inducing a hemispherical magnetic field in rotating spheres and implications for the past martian dynamo.* Physics of the Earth and planetary interiors, **185**, 61-73 (2011).
 - [22] N.O. WEISS, M.J. THOMPSON. *The Solar Dynamo.* Space Sciences Series of ISSI, **32**, 53-66 (2009).
 - [23] S. BASU, H.M. ANTIA. *Changes in solar dynamics from 1995 to 2002.* The Astrophysical Journal, **585**, 553-565 (2003).
 - [24] J. SWIFT, P.C. HOHENBERG. *Hydrodynamic fluctuations at the convective instability.* Phys. Rev. A, **15**, 319-328 (1977).
 - [25] J.M. GAMBAUDO. *Perturbation of a Hopf bifurcation by an external time-periodic forcing.* Journal of differential equations, **57**, 172-199 (1985).
 - [26] L.S. TUCKERMAN, D. BARKLEY. *Bifurcation analysis of the Eckhaus instability.* Physica D, **46**, 57-86 (1990).
 - [27] I. REHBERG, E. BODENSCHATZ, B. WINKLER, F.H. BUSSE. *Forced phase diffusion in a convection experiment.* Phys. Rev. Lett., **59**, 3 (1987).
 - [28] L.S. TUCKERMAN, D. BARKLEY. *Global bifurcation to travelling waves in axisymmetric convection.* Phys. Rev. Lett., **61**, 4 (1988).
 - [29] F.H. BUSSE, J. WICHT. *A simple dynamo caused by conductivity variations.* Geophysical and astrophysical fluid dynamics, **64**, 135-144 (1991).
 - [30] YA.B. ZEL'DOVICH. *The magnetic field in the two-dimensional motion of a conducting turbulent fluid.* Sov. Phys. JETP, **4**, 460-462 (1957).
 - [31] D.J. IVERS, R.W. JAMES. *Axisymmetric antidynamo theorems in compressible non-uniform conducting fluids.* Phil. Trans R. Soc. Lond. A, **312**, 179-218 (1984).
 - [32] A.D. GILBERT. *Fast dynamo action in the Ponomarenko dynamo.* Geophysical and astrophysical fluid dynamics, **44**, 541-258 (1988).
 - [33] G.I. SIVASHINSKY. *Weak turbulence in periodic flows.* Physica D, **17**, 243-255 (1985).
 - [34] R.H. KRAICHNAN. *Inertial ranges in two-dimensional turbulence.* Physics of fluids, **10** (1967).
 - [35] J. SOMMERIA. *Experimental study of the two-dimensional inverse energy cascade in a square box.* Journal of fluid mechanics, **170**, 139-168 (1986).
 - [36] D. MOLENAAR, H.J.H. CLERCX, G.J.F. VAN HEIJST. *Angular momentum of forced 2D turbulence in a square no-slip domain.* Physica D, **196**, 329-340 (2004).

- [37] S. GAMA, M. VERGASSOLA, U. FRISCH. *Negative eddy viscosity in isotropically forced two-dimensional flow : linear and nonlinear dynamics.* Journal of fluid mechanics, **260**, 95-126 (1994).
- [38] U. FRISCH, Z.S. SHE, P.L. SULEM. *Large-scale flow driven by the anisotropic kinetic alpha effect.* Physica D, **28**, 382-392 (1987).
- [39] A. ALEXAKIS, C.R. DOERING. *Energy and enstrophy dissipation in steady state 2d turbulence.* Physics letters A, **359**, 652-657 (2006).
- [40] C. GISSINGER, E. DORMY, S. FAUVE. *Morphology of field reversals in turbulent dynamos.* Europhysics Letters, **90**, 49001 (2010).
- [41] D.W. HUGHES, M.R.E. PROCTOR. *A low-order model of the shear instability of convection : chaos and the effect of noise.* Nonlinearity, **3**, 127-153 (1990).
- [42] C. GREBOGI, E. OTT, J.A. YORKE. *Chaotic attractors in crisis.* Phys. Rev. Lett., **48**, 1507 (1982).
- [43] C. GREBOGI, E. OTT, F. ROMEIRAS, J.A. YORKE. *Critical exponents for crisis-induced intermittency.* Phys. Rev. A, **36**, 5365-5380 (1987).
- [44] G. AHLERS, S. GROSSMANN, D. LOHSE. *Heat transfer and large scale dynamics in turbulent Rayleigh-Bénard convection.* Rev. Mod. Phys., **81**, 503-537 (2009).
- [45] M. CHANDRA, M. VERMA. *Dynamics and symmetries of flow reversals in turbulent convection.* Arxiv preprint 1103.4106 (2011).

Liste de publications

Afin d'écrire un manuscrit qui ait une certaine cohérence, j'ai sélectionné parmi les travaux que j'ai effectués au Laboratoire de Physique Statistique ceux qui entrent dans le cadre de l'étude d'un champ à grande échelle engendré sur un fond turbulent. Il en résulte que, mise à part l'expérience VKS, les travaux expérimentaux auxquels j'ai participé au LPS n'ont pas été présentés dans cette thèse. Ainsi, j'ai étudié durant mon stage de Master 2 l'instabilité oscillante qui apparaît dans un écoulement turbulent de particules ferromagnétiques soumises à un champ magnétique externe. Cette étude a donné lieu à une publication dans *Europhysics Letters*. J'ai également travaillé avec Michaël Berhanu et Nicolas Mordant sur l'effet d'un fort champ magnétique sur un écoulement turbulent de gallium liquide. Ces travaux sont présentés dans deux publications, une dans *Physical Review E* et une dans *Physics of Fluids*. J'ai participé à l'école d'été *Geophysical Fluid Dynamics* de la Woods Hole Oceanographic Institution. Durant ce programme de 10 semaines, j'ai entrepris une étude théorique de stabilité de l'écoulement de Taylor-Couette en présence d'un écoulement radial imposé, sous la direction des professeurs C.R. Doering et E.A. Spiegel. Cette étude a été publiée dans *Physics of Fluids*. Nicolas Mujica m'a accueilli deux fois dans son groupe de recherche à la Universidad de Chile, à Santiago. J'ai participé à des expériences sur une fine couche granulaire bi-disperse, qui a donné lieu à une publication dans *Physical Review Letters*.

Les travaux présentés dans cette thèse ont également donné lieu à des publications. Dans le cadre de la collaboration VKS, les différents régimes dynamiques de l'expérience sont présentés dans un article publié dans *European Physical Journal B*, et la bistabilité entre champ magnétique stationnaire et oscillant a fait l'objet d'un article dans *Journal of Fluid Mechanics*. En ce qui concerne les travaux théoriques présentés dans ce manuscrit, la localisation hémisphérique du champ magnétique est publiée dans *Physical Review E* et l'étude numérique des renversements d'une circulation globale en turbulence 2D a été soumise à *Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics* dans le cadre d'un article de revue sur différents systèmes de physique non-linéaire présentant des renversements d'un champ à grande échelle.

1. *Reversals of a large scale field generated over a turbulent background*, B. Gallet, J. Herault, C. Laroche, F. Pétrélis, S. Fauve, soumis à *Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics*.
2. *Energy bursts in shallow granular systems*, N. Rivas, S. Ponce, B. Gallet, D. Risso, R. Soto, P. Cordero, N. Mujica, *Phys. Rev. Let.*, **106**, 8 (2011)
3. *Destabilizing Taylor–Couette flow with suction*, B. Gallet, C.R. Doering, E.A. Spiegel, *Physics of Fluids*, **22**, 034105 (2010)
4. *Dynamo regimes and transitions in the VKS experiment*, M. Berhanu, G. Verhille, J. Boisson, B. Gallet, C. Gissinger, S. Fauve, N. Mordant, F. Pétrélis, M. Bourgoïn, Ph. Odier, J.-F. Pinton, N. Plihon, S. Aumaître, A. Chiffaudel, F. Daviaud, B. Dubrulle, C. Pirat, *European Physical Journal B* (2010).
5. *From reversing to hemispherical dynamos*, B. Gallet, F. Pétrélis, *Phys. Rev. E*, **80**, 035302(R) (2009).
6. *Oscillatory instability of interacting grains in a turbulent flow*, B. Gallet, F. Pétrélis, *Europhysics Letters*, **87**, 5 (2009)
7. *Bistability between a stationary and an oscillatory dynamo in a turbulent flow of liquid sodium*, M. Berhanu, B. Gallet, R. Monchaux, M. Bourgoïn, Ph. Odier, J.-F. Pinton, N. Plihon, R. Volk, S. Fauve, N. Mordant, F. Pétrélis, S. Aumaître, A. Chiffaudel, F. Daviaud, B. Dubrulle, F. Ravelet, *Journal of Fluid Mechanics*, **641**, 217-226 (2009).

8. *Influence of an external magnetic field on forced turbulence in a swirling flow of liquid metal*, B.Gallet, M. Berhanu, N. Mordant, Physics of Fluids, **21**, 085107 (2009).
9. *Reduction of velocity fluctuations in a turbulent flow of liquid gallium by an external magnetic field*, M. Berhanu, B. Gallet, N. Mordant and S. Fauve, Phys. Rev. E **78**, 015302, (2008).

Résumé

L'expérience Von Karman sodium (VKS) engendre un champ magnétique par effet dynamo dans un écoulement fortement turbulent de sodium liquide. Ce champ peut être stationnaire, oscillant, ou bistable entre un état stationnaire et un état oscillant. Pour d'autres valeurs des paramètres de contrôle, il présente un régime de renversements erratiques, similaires à ceux des observations paléomagnétiques. Nous montrons que tous ces régimes dynamiques résultent du couplage de deux modes de champ magnétique. Nous utilisons ensuite un modèle simple de dynamo cinématique pour étudier la structure spatiale du champ magnétique engendré. Ceci nous permet de faire le lien entre les dynamos localisées dans un seul hémisphère (champ magnétique de Mars) et les renversements erratiques du champ magnétique (géodynamo).

La dynamique de basse dimensionalité du champ magnétique à grande échelle présente une forte analogie avec la dérive d'un motif périodique engendré par instabilité. L'étude de ce système simple permet d'acquérir plus d'intuition sur le problème magnétique.

Nous présentons ensuite un mécanisme d'instabilité par lequel une modulation à petite échelle des conditions aux limites magnétiques entraîne la croissance d'un champ à grande échelle. Ce phénomène peut expliquer le rôle déterminant des pales ferromagnétiques des turbines mettant en mouvement le sodium dans l'expérience VKS.

Enfin, nous présentons une étude numérique de la dynamique de la circulation à grande échelle engendrée dans une turbulence à deux dimensions. Un calcul analytique en régime fortement non-linéaire met en évidence le lien entre les petites échelles et la circulation globale. La prise en compte d'une friction linéaire entraîne des renversements erratiques du sens de rotation de cette circulation. Nous caractérisons ces renversements à l'aide des outils des systèmes dynamiques.